

Б. Т. ЖУМАГУЛОВ, Ш. Н. КУТТЫКОЖАЕВА

МЕТОД ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ОКЕАНА

Изучаются варианты метода фиктивных областей для нелинейной модели океана. Исследованы теорема существования и сходимости решения приближенных моделей, полученных с помощью метода фиктивных областей. Выведена наилучшая оценка скорости сходимости решения метода фиктивных областей.

Нестационарная линейная задача течения в океане в области $\Omega_T = (0, T) \times \Omega$, $\Omega = (0, H) \times \Omega_1$, $\Omega_1 \subset R^2$ сводится к решению следующей системы дифференциальных уравнений [1]

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} + \mu \Delta v - l \times v - \hat{\nabla} \xi + f, \quad (1)$$

$$\int_0^H \operatorname{div} v dx_3 = \int_0^H \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) dx_3 = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x_3} = 0, \quad \int_{\Omega} \xi dx = 0, \quad (2)$$

с начально-краевыми условиями

$$v|_{x_3=0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x_3}|_{x_3=H} = 0, \quad v|_{t=0} = v_0(x), \tag{3}$$

где $v = (v_1, v_2)$, $\hat{V} = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2})$,

$$v|_{\gamma} = 0, \quad \gamma - \text{боковая граница области } \Omega. \tag{4}$$

Задачу (1)–(4) решаем методом фиктивных областей [2], [3]. Согласно методу фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам во вспомогательной области $D_T = (0, T) \times D$, $D = (0, H) \times (\Omega_1 \cup \Omega_0) = \Omega \cup D_0$, строго содержащей в себе Ω с боковой границей Γ , решаем систему уравнений с малым параметром

$$\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial^2 v^\varepsilon}{\partial x_3^2} + \mu \Delta v^\varepsilon - l \times v^\varepsilon - \hat{V} \xi^\varepsilon + f - \frac{\xi_0(x)}{\varepsilon} v^\varepsilon, \tag{5}$$

$$\int_0^H \hat{d} i v v^\varepsilon dx_3 = 0, \quad \frac{\partial \xi^\varepsilon}{\partial x_3} = 0, \quad \int_D \xi dx = 0, \tag{6}$$

$$v^\varepsilon|_{t=0} = v_0(x), \tag{7}$$

$$v^\varepsilon|_{x_3=0} = 0, \quad \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x_3}|_{x_3=H} = 0, \quad v^\varepsilon|_{\Gamma} = 0, \tag{8}$$

где $\xi_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega, \\ 1, & x \in D_0. \end{cases}$

Методы получения неулучшаемой оценки скорости сходимости методом фиктивных областей для линейных параболических уравнений [4] для данных систем непригодны. В данной работе предлагается новый подход для получения точной оценки погрешности между решениями задачи и приближенного решения, полученного методом фиктивных областей.

В дальнейшем через C – будем обозначать различные постоянные, зависящие от данных задачи и постоянных теоремы вложения, но не зависящие от малого параметра ε . Будем использовать обозначения пространств из работы [5].

Введем пространства

$$\hat{C}(D) = \left\{ \varphi \quad (\varphi_1, \varphi_2) \in C^2(D), \int_0^H \hat{d} i v \varphi dx_3 = 0, \varphi|_{\Gamma} = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}|_{x_3=H} = 0, \varphi|_{x_3=0} = 0 \right\}.$$

Замыкания $\hat{C}(D)$ – в нормах пространств $L_2(D)$, $W_2^1(D)$, $W_2^2(D)$ обозначим через $V_0(D)$, $V_1(D)$, $V_2(D)$ соответственно.

Определение. Сильным решением задачи (5)–(8) называется функция $v^\varepsilon \in L_2(0, T; V_2(D))$, $\hat{V} \xi^\varepsilon \in L_2(0, T; L_2(D))$, $v_t^\varepsilon \in L_2(0, T; L_2(D))$, удовлетворяющая уравнению (5)–(6) и начальнo-граничным условиям (7), (8) почти всюду в соответствующей мере.

Продолжим нулем вне Ω функцию $v_0(x)$, $f(x, t)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $f(x,t) \in L_2(0,T;L_2(D))$, $v_0(x) \in V_1(D)$, $\gamma \in C^2$. Тогда существует единственное сильное решение задачи (5)–(8) и для решения справедлива оценка

$$\|v_t^\varepsilon\|_{L_2(0,T;L_2(D))} + \|v^\varepsilon\|_{L_2(0,T;V_2(D))} + \|\hat{\nabla}\xi^\varepsilon\|_{L_2(0,T;L_2(D))} \leq C_\varepsilon, \quad (9)$$

$$\|v^\varepsilon - v\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} \leq C\sqrt{\varepsilon}, \quad (10)$$

где $C_\varepsilon \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$, v – является решением задач (1)–(3). Оценка (10) – неулучшаемая по порядку ε .

Метод фиктивных областей с продолжением по старшему коэффициенту.

Метод фиктивных областей для задачи (1)–(3) с продолжением по старшим коэффициентам сводятся к решению системы дифференциальных уравнений в области D_T

$$\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial^2 v^\varepsilon}{\partial x_3^2} + \operatorname{div}(\mu^\varepsilon \hat{\nabla} v^\varepsilon - \delta \xi^\varepsilon) - l \times v^\varepsilon + f, \quad (11)$$

$$\int_0^H \operatorname{div} v^\varepsilon dx_3 = 0, \quad (12)$$

Систему (11), (12) решаем с условиями

$$v^\varepsilon|_{t=0} = v_0(x), \quad x \in D, \quad v^\varepsilon|_\Gamma = 0, \quad t \in (0,T), \quad (13)$$

и условиями согласованиями

$$[v^\varepsilon]_\gamma = 0, \quad \left[\mu^\varepsilon \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial n} - \delta \xi^\varepsilon \right]_\gamma = 0, \quad t \in (0,T), \quad (14)$$

где δ – метрический тензор, $\mu^\varepsilon = \begin{cases} \mu, & x \in \Omega, \\ \frac{\mu}{\varepsilon}, & x \in D_0 \end{cases}$.

$[\cdot]_\gamma$ – означает скачок функции на границе γ . Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $v_0(x) \in V_1(D)$, $f \in L_2(0,T;L_2(D))$, $\gamma \in C^2$. Тогда существует единственное сильное решение задач (11)–(14) и для решения справедливы оценки

$$\left\| \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L_2(0,T;L_2(D))} + \|v^\varepsilon\|_{L_2(0,T;V_1(D))} + \|v^\varepsilon_{x_3 x_3}\|_{L_2(0,T;L_2(D))} \leq C < \infty,$$

$$\begin{aligned} & \|v^\varepsilon\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\|v^\varepsilon_{x_2 x_2}\|_{L_2(0,T;L_2(D_0))} + \|v^\varepsilon_{x_1 x_1}\|_{L_2(0,T;L_2(D_0))} \right) + \|\hat{\nabla}\xi^\varepsilon\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} + \\ & + \|\hat{\nabla}\xi^\varepsilon\|_{L_2(0,T;L_2(D_0))} + \|\xi^\varepsilon\|_{L_2(0,T;L_2(D))} \leq C(\|v_0\|_{V_1(D)} + \|f\|_{L_2(0,T;L_2(D))}), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\|v^\varepsilon - v\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} \leq C\varepsilon, \quad (16)$$

где при $\varepsilon \rightarrow 0$ сильное решение задачи (11)–(14) сходится к сильному решению задач (1)–(3).

Оценка близости решения (16) неулучшаемая по порядку ε .

Математическое моделирование краевых условий океанологии с помощью метода фиктивных областей.

В системах (1), (2) в физических постановках отсутствуют граничные условия для функции $\xi(x_1, x_2, t)$ (уровень воды). Этот факт в значительной степени затрудняют создание эффективного численного алгоритма. Далее предлагаем вариант метода фиктивных областей для нелинейной стационарной задачи, где можно поставить граничные условия для функции $\xi(t, x_1, x_2)$.

Рассмотрим систему нелинейной стационарной модели океана

$$\begin{aligned}
 (\hat{v} \cdot \nabla)v &= \mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} + \mu \Delta v - l \times v - \hat{\nabla} \xi + f, \\
 \int_0^H d \hat{w} v dx_3 &= 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x_3} = 0,
 \end{aligned} \tag{17}$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial v}{\partial x_3} \Big|_{x_3=H} = 0, \quad v \Big|_{x_3=0} = 0, \quad v \Big|_{\gamma} = 0, \tag{18}$$

где $\hat{v} = (v_1, v_2, -\int_0^{x_3} d \operatorname{div} v dx_3)$.

Для задачи (17), (18) в соответствии с методом фиктивных областей сформируем вспомогательную задачу. Предположим, что область $\bar{D} = [0,1] \times [0,1] \times [0,H]$ прямоугольный параллелепипед.

$$(\hat{v} \nabla)v^\varepsilon = \mu_0 \frac{\partial^2 v^\varepsilon}{\partial x_3^2} + \mu \Delta v^\varepsilon - l \times v^\varepsilon - \hat{\nabla} \xi^\varepsilon - \frac{\xi_0(x)}{\varepsilon} v^\varepsilon + f, \tag{19}$$

$$\int_0^H d \operatorname{div} v^\varepsilon dx_3 = 0, \quad \frac{\partial \xi^\varepsilon}{\partial x_3} = 0. \tag{20}$$

По переменным x_1, x_2 – поставим условия периодичности для функций $\xi^\varepsilon, v^\varepsilon$

$$\frac{\partial^k \xi^\varepsilon}{\partial x_i^k} \Big|_{x_i=0} = \frac{\partial^k \xi^\varepsilon}{\partial x_i^k} \Big|_{x_i=1}, \quad k = 0,1, \quad i = 1,2, \tag{21}$$

$$\frac{\partial^k v}{\partial x_i^k} \Big|_{x_i=0} = \frac{\partial^k v^\varepsilon}{\partial x_i^k} \Big|_{x_i=1}, \quad k = 0,1, \quad i = 1,2, \tag{22}$$

$$\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x_3} \Big|_{x_3=H} = 0, \quad v^\varepsilon \Big|_{x_3=0} = 0. \tag{23}$$

Относительно разрешимости задач имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Если $f \in L_2(D)$, $\gamma \in C^2$, то существует хотя бы одно сильное решение задач (19)–(23) и для решения справедливы оценки

$$\|v^\varepsilon\|_{V_1(D)} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|v^\varepsilon\|_{L_2(D_0)} \leq C \|f\|_{L_2(D)}, \quad \|v^\varepsilon\|_{W_2^2(D) \cap V_1(D)} \leq C_\varepsilon \|f\|_{L_2(D)},$$

$$\|v - v^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leq C\sqrt{\varepsilon}, \quad \text{при малом } \|f\|_{L_2(D)}, \quad (24)$$

где v – является решением задач (17)–(18) $C_\varepsilon \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Заметим, что при численном решении относительно ξ^ε – получаем уравнения Пуассона с разрывными коэффициентами, зависящими от малого параметра. Здесь можно применить итерационные методы, предложенные в работе [2], в которых скорости сходимости не зависят от изменения малого параметра ε . Аналогично можно исследовать метод фиктивных областей с продолжением по старшему коэффициенту с граничными условиями (21)–(23). Получена точная оценка скорости сходимости

$$\|v^\varepsilon - v\|_{L_2(\Omega)} \leq C\varepsilon. \quad (25)$$

Наконец, рассмотрим математическое моделирование краевых условий методом фиктивных областей для нестационарных уравнений океанологии

$$\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t} + (\hat{v}^\varepsilon \nabla) v^\varepsilon - \mu_0 \frac{\partial^2 v^\varepsilon}{\partial x_3^2} + \mu \Delta v^\varepsilon = -\hat{\nabla} \xi + f - \frac{\xi_0(x) v^\varepsilon}{\varepsilon}, \quad \int_0^H \operatorname{div} v^\varepsilon dx_3 = 0, \quad (26)$$

с граничными условиями (21), (22) и

$$v^\varepsilon|_{t=0} = v_0, \quad v^\varepsilon|_{x_3=0} = 0, \quad \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x_3}|_{x_3=H} = 0. \quad (27)$$

Определение. Обобщенным решением задач (26), (27) и (21), (22) называется вектор-функция $v^\varepsilon \in L_2(0, T; V_1(D)) \cap L_\infty(0, T; V_0(D))$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_0^T \left[(v^\varepsilon, \psi_t + (\hat{v}^\varepsilon \nabla) \psi, v^\varepsilon)_D - \mu_0 (v_{x_3}^\varepsilon, \psi_{x_3})_D - \mu (\hat{\nabla} v^\varepsilon, \hat{\nabla} \psi)_D - \left(\frac{\xi_0(x)}{\varepsilon} v^\varepsilon, \psi \right)_D + (f, \psi) \right] \times \\ \times dt + (v_0, \psi(0))_D = 0,$$

для любой вектор функции $\psi \in C^1(0, T; V_2(D) \cap V_1(D))$, $\psi(T) = 0$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Пусть $f(x, t) \in L_2(0, T, L_2(D))$, $\gamma \in C^2$, $v_0(x) \in V_1(D)$. Тогда существует хотя бы одно обобщенное решение задач (26), (27) и (21), (22). Для решения справедлива оценка

$$\|v^\varepsilon\|_{L_\infty(0, T; L_2(D))} + \|v^\varepsilon\|_{L_2(0, T; V_1(D))} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|v^\varepsilon\|_{L_2(0, T; L_2(D))} \leq C < \infty,$$

и обобщенное решение сходится к обобщенному решению нестационарной модели океана при $\varepsilon \rightarrow 0$ со скоростью

$$\|v^\varepsilon - v\|_{L_2(0, T; L_2(\Omega))} \leq C\sqrt{\varepsilon}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочергин В.П. Теория и метод расчета океанических течений // ВЦ СО АН СССР. Новосибирск: Наука, 1978. 124 с.
2. Вабищевич П.Н. Метод фиктивных областей для задачи математической физики. М.: изд. МГУ, 1991. 156 с.
3. Смагулов Ш. Метод фиктивных областей для краевой задачи уравнений Навье-Стокса. Новосибирск, 1976. Препринт ВЦ СО АН.
4. Копавалов А.Н. // Численные методы механики сплошной среды. 1972. Т. 3. №5.
5. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. СО РАН, Новосибирск: Наука, 1983. 305 с.

Резюме

Сызықты емес океан моделі үшін жалған облыстар әдісі қарастырылады. Жалған облыстар әдісі бойынша алынған жуықталынған модель шешімінің бар болу және жинақталу теоремасы зерттелінген. Жалған облыстар әдісі шешімінің жылдамдығының жақсартылмайтын бағасы алынған.

Summary

The versions of fictitious domains method for non-linear ocean model are studied. The theorems of existence and convergence for the auxiliary problem of the fictitious domains method are proved. The non-improved convergence speed estimation has been obtained.

Поступила 2.03.07г.