УДК 517.946

А. В. РОГОВОЙ

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ ДЛЯ КОНТУРОВ ОДНОГО КЛАССА

(Представлена академиком НАН РК Т. Ш. Кальменовым)

В конечной области $\Omega \subset R^2$, ограниченной при $y<0$ – характеристиками $AC: \quad x+y=0$, и $BC: \quad x-y=1$, а при $y>0$ – кривой Ляпунова

$$\sigma_\delta = \left\{(x,y): \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y+\delta)^2 = \frac{1}{4}+\delta^2, \quad y>0\right\},$$

рассмотрим однородную задачу Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе

$$\operatorname{sgn} y\, u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{1}$$

$$u|_{\sigma \cup AC} = 0, \tag{2}$$

причем должны выполняться следующие условия «склеивания» решения на линии изменения типа уравнения $\{y=0\}$:

$u(x,+0) = u(x,-0)$, (3)

$u_y(x,+0) = u_y(x,-0)$. (4)

В работах [1], [2] был получен ряд результатов для более общего уравнения Геллерстедта. Оказалось, что результаты этих работ можно значительно усилить.

Рассмотрим важный класс контуров, соответствующий следующим значениям параметра δ:

$$\delta = \frac{1}{2} ctg\left(\frac{4p-1}{4n}\cdot\pi\right), \quad n=1,2,\ldots, \quad p=1,2,\ldots n. \tag{5}$$

Для данного случая кривая Ляпунова примет вид

$$\sigma_\delta = \left\{(x,y): \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y+\delta)^2 = \frac{1}{4}+\delta^2, \quad y>0\right\}, \tag{6}$$

где параметр δ удовлетворяет соотношению (5).

Найдем ненулевое решение задачи (1)-(4) для контуров (6). Обозначим

$$u(x,0)=\tau(x), \qquad u_y(x,0)=\nu(x).$$

В гиперболической части области Ω^- рассмотрим задачу Коши–Гурса (Дарбу), которая получается из задачи (1)–(4)

$$u_{xx}-u_{yy}=0, \qquad u|_{AC}=0, \qquad u_y|_{AB}=\nu(x).$$

В характеристических переменных $\begin{cases}\xi = x+y, \\ \eta = x-y\end{cases}$ решение задачи Дарбу можно записать следующим образом

$$u=\int_0^\xi \nu(t)dt = \int_0^{x+y} u_y(t,0)dt. \tag{7}$$

На линии изменения типа уравнения $\{y=0\}$ имеем

$$u(x,0)=\int_0^x u_y(t,0)dt. \tag{8}$$

Таким образом, соотношение (8) представляет собой условие, эквивалентное гиперболической части условия (2).

В эллиптической части Ω^+ рассмотрим следующую задачу: найти решение уравнения

$$u_{xx}+u_{yy}=0,$$

удовлетворяющее, в силу постановки задачи Трикоми и полученному соотношению (8), краевым условиям

$$u|_{\sigma_\delta}=0, \qquad u(x,0)=\int_0^x u_y(t,0)dt.$$

Сделаем следующую замену переменных

$$\begin{cases}1-x = r\cos\kappa, \\ y = r\sin\varphi.\end{cases}$$

В результате контур σ_δ запишется как

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y+\delta)^2 = \frac{1}{4}+\delta^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = r(\cos\varphi - 2\delta\sin\varphi).$$

Сама же задача преобразуется к виду

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0, \tag{9}$$

$$u(r,0) = -\int_0^\eta \frac{u_\varphi(t,0)}{t}dt, \tag{10}$$

$$u|_{r=\cos\varphi-2\delta\sin\varphi}=0\,. \tag{11}$$

Будем искать решение уравнения (9) в виде

$$u(r,\varphi)=r^k\Phi(\varphi)\,.$$

Учитывая условие (10), получим, что всякая функция вида

$$u_k(r,\varphi)=c_k r^k(\cos k\varphi-\sin k\varphi)\,,$$

где k – любое вещественное число, c_k – константа, будет решением уравнения (9), удовлетворяющее краевому условию (10). В силу однородности и линейности уравнения (9) и условия (10), то же относится и к любой линейной комбинации функций данного вида.

Рассмотрим следующую функцию

$$u_n(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\,\frac{\cos k\varphi+\sin k\varphi}{r^k}\,, \tag{12}$$

где

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}\,.$$

В силу сказанного выше, функция (12) удовлетворяет уравнению (9) и краевому условию (10) (вместо k рассматривается $-k$). Покажем, что она удовлетворяет и краевому условию (11) для тех контуров, у которых параметр δ определяется соотношением (5). Для этого нам достаточно показать, в силу представления (12) и краевого условия (11), что

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\,\frac{\cos k\varphi+\sin k\varphi}{(\cos\varphi-2\delta\sin\varphi)^k}=0\,, \tag{13}$$

где δ определяется соотношением (5).

Рассмотрим предварительно следующее выражение

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k} C_n^k\,\frac{\cos k\varphi+i\sin k\varphi}{(\cos\varphi-2\delta\sin\varphi)^k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\varphi-2\delta\sin\varphi}\right)^k\cdot(-1)^{n-k}=\left(\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\varphi-2\delta\sin\varphi}-1\right)^n=$$

$$=\left(\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi-\cos\varphi+2\delta\sin\varphi}{\cos\varphi-2\delta\sin\varphi}\right)^n=\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi-2\delta\sin\varphi}\right)^n\cdot(2\delta+i)^n.$$

Но

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k} C_n^k\,\frac{\cos k\varphi+\sin k\varphi}{(\cos\varphi-2\delta\sin\varphi)^k}=$$

$$=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k} C_n^k\,\frac{\cos k\varphi+i\sin k\varphi}{(\cos\varphi-2\delta\sin\varphi)^k}\right)+\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k} C_n^k\,\frac{\cos k\varphi+i\sin k\varphi}{(\cos\varphi-2\delta\sin\varphi)^k}\right),$$

следовательно

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k} C_n^k\,\frac{\cos k\varphi+\sin k\varphi}{(\cos\varphi-2\delta\sin\varphi)^k}=\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi-2\delta\sin\varphi}\right)^n\left(\mathrm{Re}(2\delta+i)^n+\mathrm{Im}(2\delta+i)^n\right). \tag{14}$$

Поскольку δ определяется из соотношения (5), то

$$(2\delta+i)^n=\left(ctg\frac{4p-1}{4n}\pi+i\right)^n=\left(\frac{\cos\frac{4p-1}{4n}\pi+i\sin\frac{4p-1}{4n}\pi}{\sin\frac{4p-1}{4n}\pi}\right)^n=\frac{\cos\left(p\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(p\pi-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^n\frac{4p-1}{4n}\pi}.$$

Следовательно, учитывая что $p=1,2,\ldots,n$, получим

$$\mathrm{Re}(2\delta+i)^n+\mathrm{Im}(2\delta+i)^n=$$

$$=\frac{\cos\left(p\pi-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(p\pi-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^n\frac{4p-1}{4n}\pi}=\frac{(-1)^p\cos\frac{\pi}{4}+(-1)^{p+1}\sin\frac{\pi}{4}}{\sin^n\frac{4p-1}{4n}\pi}=(-1)^p\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin^n\frac{4p-1}{4n}\pi}=0.$$

Таким образом, в силу (14), получим что соотношение (13) доказано, то есть в случае рассматриваемого класса контуров функция (12) будет решением задачи в эллиптической части области.

Переходя от переменных r, φ к исходным переменным x и y, получим представление решения однородной задачи Трикоми в эллиптической части области:

$$y>0:\quad u(x,y)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k\,\frac{\cos\left(k\cdot arctg\frac{y}{1-x}\right)+\sin\left(k\cdot arctg\frac{y}{1-x}\right)}{\left((1-x)^2+y^2\right)^{\frac{k}{2}}},\tag{15}$$

или

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k\,\frac{(1-x)^k+k(1-x)^{k-1}y-C_k^2(1-x)^{k-2}y^2-C_k^3(1-x)^{k-3}y^3+\mathrm{K}}{\left((1-x)^2+y^2\right)^k}.\tag{16}$$

Из представления (16) по формуле (8) восстановим значение функции $u(x,y)$ в гиперболической части области

$$y<0:\qquad u(x,y)=\left(\frac{1}{1-x-y}-1\right)^n=\left(\frac{x+y}{1-x-y}\right)^n.\tag{17}$$

В итоге, сопоставляя формулы (15), (16), (17) и обобщая проведенные выше рассуждения, получим, что функция

$$u(x,y)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k\,\frac{\cos\left(k\cdot arctg\frac{y}{1-x}\right)+\sin\left(k\cdot arctg\frac{y}{1-x}\right)}{\left((1-x)^2+y^2\right)^{\frac{k}{2}}}= & \\ \displaystyle=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}C_n^k\,\frac{(1-x)^k+k(1-x)^{k-1}y-C_k^2(1-x)^{k-2}y^2-C_k^3(1-x)^{k-3}y^3+\Lambda}{\left((1-x)^2+y^2\right)^{\frac{k}{2}}}, & y>0,\\ \displaystyle\left(\frac{1}{1-x-y}-1\right)^n=\left(\frac{x+y}{1-x-y}\right)^n, & y<0,\end{cases}$$

(18)

является решением однородной задачи (1)-(4) для контуров (6), у которых параметр δ удовлетворяет соотношению (5). Но, как легко видеть, функция (18) имеет разрыв в точке $B(1,0)$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Существует разрывное в точке B(1,0) решение однородной задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе в случае контуров (6), для которых выполнено соотношение (5), причем для этих контуров решение представимо по формуле (18).*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Роговой А.В.* О гладкости решений задачи Трикоми для уравнения Геллерстедта // Вестн. КазНУ им. аль-Фараби. Сер. матем., мех., информ. 2002. №5(33). С. 50-56.

2. *Роговой А.В.* Решение задачи Трикоми для уравнений смешанного типа методом преобразований Меллина: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. н. Шымкент, 2004. 26 с.

Резюме

Лаврентьев–Бицадзе теңдеуінде Трикоми есебі бір қисық жағдайда нетривиалдық үзіліс шешімі бар деп дәлелденген, ал үзілісті шешімі тура құрастырылған.

Summary

Existence of non trivial and non continuous solution of Tricomi problem for Lavrentjev-Bitsadze equation in the case of one class areas has been proved and this solution has been build in the work.

Южно-Казахстанский гуманитарный институт им. М. Сапарбаева, г. Шымкент

Поступила 9.02.07г.