УДК517.927.25

А. М. САРСЕНБИ

О БЕЗУСЛОВНОЙ СХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ НА ОТРЕЗКЕ

(Представлена академиком НАН РК Т. Ш. Кальменовым)

Установлены новые необходимые и достаточные условия безусловной базисности систем собственных и присоединенных функций дифференциальных операторов высших порядков.

На произвольном конечном интервале G числовой оси рассмотрим формальный дифференциальный оператор

$$Lu = u^{(n)}(x) + p_1(x)u^{(n-1)}(x) + \ldots + p_n(x)u(x),$$

$$n \geq 2, \qquad (1)$$

где $p_i(x) \in W_1^{n-i}(G),\ i = \overline{i,n}$.

Под регулярным решением уравнения

$$Lu = \lambda u(x) + f(x),$$

где λ – комплексный параметр, а $f(x) \in L_1(G)$, будем понимать любую функцию $u(x)$, абсолютно непрерывную вместе со своими производными до $(n–1)$-го порядка включительно на замкнутом интервале $\overline{G}$ и почти всюду в G удовлетворяющую данному уравнению.

Системой собственных и присоединенных функций оператора L мы будем называть произвольную систему $\{u_k(x)\}$ комплекснозначных функций, каждая из которых является регулярным решением уравнения

$$Lu_k + \lambda_k u_k(x) = \theta_k u_{k-1}(x), \qquad (2)$$

где число θ_k равно либо нулю (в этом случае функцию $u_k(x)$ называем собственной функцией), либо единице (в этом случае требуем $\lambda_k = \lambda_{k-1}$ и функцию $u_k(x)$ называем присоединенной функцией), причем $\theta_1 = 0$. Числа λ_k называем собственными значениями.

Наряду с собственным значением λ_k мы будем пользоваться спектральным параметром μ_k, который определим следующим образом:

$$\mu_k = \begin{cases} \left[(-1)^{n/2}(-\lambda_k)\right]^{1/n}, & \text{если} \quad n - \text{четно;} \\ (-i\lambda_k)^{1/n}, & \text{если} \quad n - \text{нечетно} \\ & \text{и} \quad \operatorname{Im}\lambda_k \ge 0; \\ (i\lambda_k)^{1/n}, & \text{если} \quad n - \text{нечетно} \\ & \text{и} \quad \operatorname{Im}\lambda_k < 0, \end{cases}$$

где $\left[\rho\exp(i\varphi)\right]^{1/n} = \rho^{1/n}\exp\left(i\varphi/n\right)$,

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi \le \frac{3\pi}{2}.$$

В рассматриваемой системе $\{u_k(x)\}$, состоящей из собственных и присоединенных функций оператора L, содержатся вместе с каждой собственной функцией все соответствующие ей присоединенные функции, причем при такой единой нумерации вслед за каждой собственной функцией стоят все соответствующие ей присоединенные функции. Собственные значения λ_k пронумерованы в порядке неубывания их абсолютных величин с учетом их кратности.

Формально сопряженный оператор к оператору L обозначим

$$L^*(z) = (-1)^n(z)^{(n)} + (-1)^{n-1}(\overline{p_1}z)^{n-1} + \\ + (-1)^{n-2}(\overline{p_2}z)^{n-2} + \ldots + \overline{p_n}z.$$

Следующие условия будем называть условиями В:

– система $\{u_k(x)\}$ полна и минимальна в $L_2(G)$;

– биортогонально сопряженная система $\{v_k(x)\}$ полна в $L_2(G)$ и состоит из собственных и присоединенных функций сопряженного оператора L^*, т.е. элементы системы $\{v_k(x)\}$ являются регулярными решениями уравнения

$$L^* v_k + \overline{\lambda}_k v_k(x) = \theta_{k+1} v_{k+1}(x),$$

где числа λ_k и θ_k имеют тот же смысл, что и в уравнении (2).

Прежде чем перейти к формулировке результатов, мы приведем теоремы о безусловной базисности систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора L вида (1), установленные И. С. Ломовым в работе [1]. Первая теорема И.С. Ломова формулируется следующим образом.

Теорема (И. С. Ломов). Пусть

– выполнены условия В;

– для любого собственного значения λ_k имеет место неравенство

$$\left|\operatorname{Im}\mu_k\right| \le \text{const}; \qquad (3)$$

– для любого $t \ge 0$ имеют место неравенства

$$\sum_{t \le |\mu_k| \le t+1} 1 \le \text{const}, \qquad (4)$$

$$\sum_{|\mu_k| \le t} \left|u_k(x)\right|^2 \left\|u_k(x)\right\|_{L_2(G)}^{-2} \le \text{const}(1+t); \qquad (5)$$

$$\sum_{|\mu_k| \le t} \left|v_k(x)\right|^2 \left\|v_k(x)\right\|_{L_2(G)}^{-2} \le \text{const}(1+t);$$

– в каждой цепочке собственных и присоединенных функций операторов L и L^* выполнены оценки антиаприорного типа

$$\left\|u_k(x)\right\|_{L_2(G)} \le \text{const}(1+|\mu_k|)^{n-1}\left\|u_{k+1}(x)\right\|_{L_2(G)}, \qquad (6)$$

$$\left\|v_{k+1}(x)\right\|_{L_2(G)} \le \text{const}(1+|\mu_k|)^{n-1}\left\|v_k(x)\right\|_{L_2(G)}. \qquad (7)$$

Тогда для безусловной базисности в $L_2(G)$ системы $\{u_k(x)\}$ необходимо и достаточно выполнение равномерной оценки

$$\left\|u_k(x)\right\|_{L_2(G)} \cdot \left\|v_k(x)\right\|_{L_2(G)} \le \text{const}. \qquad (8)$$

Сформулируем теперь вторую теорему И. С. Ломова.

Теорема (И. С. Ломов). Пусть выполнены условия В, (3), (5)–(7)

$$\left\|u_k(x)\right\|_{L_\infty(G)} \le \text{const}, \qquad k = 1, \quad 2, \ldots,$$

и длины всех цепочек присоединенных функций равномерно ограничены. Тогда необходимыми и достаточными условиями безусловной базисности в $L_2(G)$ системы $\{u_k(x)\}$ являются выполнение неравенств (4) и (8).

Аналогичные результаты для обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков установлены В. Д. Будаевым [2], В. М. Курбановым [3], [4].

В работе [4] В. М. Курбановым установлен следующий критерий базисности Рисса.

Теорема (В. М. Курбанов). Пусть выполнено условие (3), т.е. собственные значения оператора L вида (1) принадлежат параболе Карлемана. Тогда для базисности Рисса каждой из систем $\{u_k(x)\}$ и $\{v_k(x)\}$ необходимо и достаточно чтобы выполнялись условия (4)–(5) и хотя бы одна из систем $\{u_k(x)\}$, $\{v_k(x)\}$была почти нормирована в $L_2(G)$.

Перейдем к формулировке основных результатов работы. В работе [5] нами был установлен следующий результат. Для двух произвольных систем функций, вообще говоря, не связанных с дифференциальным оператором, справедлива

Теорема 1. Пусть для элементов произвольных систем $\{u_k(x)\}$ и $\{v_k(x)\}$ выполнены условия

$$c_k = \int_G f(x)\bar{u}_k(x)dx = (f,\ u_k(x)) \to 0,$$

$$d_k = \int_G f(x)\bar{v}_k(x)dx = (f,\ v_k(x)) \to 0, \quad (9)$$

для любой функции $f(x) \in L_1(G)$. Тогда имеют место равномерные оценки

$$\|u_k(x)\|_{L_\infty(G)} \le M_1, \qquad \|v_k(x)\|_{L_\infty(G)} \le M_2. \quad (10)$$

Если указанные системы биортогональны и образуют базис Рисса, то верно и обратное.

Абстрактная теорема 1 позволяет установить нижеследующую теорему. Важным моментом при доказательстве критерия базисности Рисса является наличие оценки типа

$$\|u_k(x)\|_{L_\infty(G)} \le const \cdot \|u_k(x)\|_{L_\lambda(G)}, \quad (11)$$

для каждой из биортогональных систем.

Если в теоремах у вышеупомянутых авторов дополнительно потребовать выполнение оценки типа (11) для собственных и присоединенных функций операторов L и L^* порядка n, то можно получить критерий базисности Рисса в терминах коэффициентов Фурье функции из $L_1(G)$.

Попутно заметим, что из (11) следует (5).

Критерий базисности Рисса в терминах коэффициентов Фурье функции $f(x) \in L_1(G)$ формулируется следующим образом.

Теорема 2. Пусть выполнены условия В, (3), оценки (11) для каждой из биортогональных систем $\{u_k(x)\}$, $\{v_k(x)\}$, причем длины всех цепочек присоединенных функций равномерно ограничены. Тогда необходимыми и достаточными условиями базисности Рисса каждой из систем $\{u_k(x)\}$ и $\{v_k(x)\}$ являются выполнение неравенства (4) и условий типа (9)

$$|(f,\, u_k(x))| \to 0\,,\ |(f,\, v_k(x))| \to 0\,,\ k \to \infty\,,$$

для любой функции $f(x) \in L_1(G)$, где $(f,\, u_k(x))$, $(f,\, v_k(x))$ – коэффициенты Фурье.

Доказательство. Если выполнены все условия теоремы и системы $\{u_k(x)\}$, $\{v_k(x)\}$ являются базисами Рисса, то из условия почти нормированности базисов Рисса и неравенств (11) следует выполнение условия (10). Далее применяем теорему 1, согласно которой, из равномерной ограниченности L_∞– норм элементов рассматриваемых систем следует утверждение теоремы, т.е. условия (9). Выполнение условия (4) обеспечивается теоремой И. С. Ломова.

Пусть теперь выполнены условия типа (9) и неравенства (4). По теореме 1 из условия (9) вытекает равномерная ограниченность L_∞ – норм элементов систем $\{u_k(x)\}$, $\{v_k(x)\}$, которые выражаются в виде неравенств (10). Отсюда следует выполнение неравенств (8). Тем самым мы получаем выполнение всех условий теоремы И. С. Ломова. Следовательно, обе рассматриваемые системы образуют безусловный базис в $L_2(G)$. Сдругой стороны, условия (8) и (10) обеспечивают почти нормированность этих систем. Поэтому по теореме Лорча [6. С. 381] каждая из систем $\{u_k(x)\}$, $\{v_k(x)\}$ образует базис Рисса. Теорема доказана.

Автор выражает искреннюю признательность всем участникам научного семинара под руководством д-ра физ.-мат. наук М. А. Садыбекова за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ломов И.С.* Неравенство Бесселя, теорема Рисса и безусловная базисность для корневых векторов обыкновенных дифференциальных операторов // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., механ. 1992. №5. С. 33-43.

2. *Будаев В.Д.* Безусловная базисность систем корневых функций обыкновенных дифференциальных операторов: Дис. … докт. ф.-м. н. М., 1993. 291с.

3. *Курбанов В.М.* Распределения собственных значений и сходимость биортогональных разложений по корневым функциям обыкновенных дифференциальных операторов: Дис. ... докт. ф.-м. н. М., 210 с.

4. *Курбанов В.М.* О распределении собственных значений и критерий бесселевости корневых функций дифференциального оператора. 1 // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 4. С. 464-478.

5. *Сарсенби А.М.* Критерий базисности Рисса корневых функций дифференциального оператора второго порядка // Докл. НАН РК. 2006. № 1. С. 44-48.

6. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965. 448 с.

Резюме

Жоғары ретті дифференциалдық операторлардың түпкілікті функциялары Рисс базисі болуы үшін қажетті және жеткілікті шарттар Фурье коэффициенттері түрінде берілген.

Summary

New criterions of Riss basisnes of system of own and joined functions of differential operators of high orders have been proved in the work.

Поступила 13.04.07г.