А.М. САРСЕНБИ

О БАЗИСАХ, СВЯЗАННЫХ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ НА ОТРЕЗКЕ

На произвольном конечном интервале G числовой оси рассмотрим формальный дифференциальный оператор

$$Lu = u^{(n)}(x) + p_1(x)u^{(n-1)}(x) + \ldots + p_n(x)u(x), \quad n \geq 2, \tag{1}$$

где $p_i(x) \in W_1^{n-i}(G),\ i = \overline{i,n}$.

Под регулярным решением уравнения

$$Lu = \lambda u(x) + f(x),$$

где λ – комплексный параметр, а $f(x) \in L_1(G)$, будем понимать любую функцию $u(x)$, абсолютно непрерывную вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно на замкнутом интервале $\overline{G}$ и почти всюду в G удовлетворяющую данному уравнению.

Системой собственных и присоединенных функций оператора L мы будем называть произвольную систему $\{u_k(x)\}$ комплекснозначных функций, каждая из которых является регулярным решением уравнения

$$Lu_k + \lambda_k u_k(x) = \theta_k u_{k-1}(x), \tag{2}$$

где число θ_k равно либо нулю (в этом случае функцию $u_k(x)$ называем собственной функцией), либо единице (в этом случае требуем $\lambda_k = \lambda_{k-1}$ и функцию $u_k(x)$ называем присоединенной функцией), причем $\theta_1 = 0$. Числа λ_k называем собственными значениями.

Наряду с собственным значением λ_k мы будем пользоваться спектральным параметром μ_k, который определим следующим образом:

$$\mu_k = \begin{cases} \left[(-1)^{n/2}(-\lambda_k)\right]^{1/n}, & \text{если } n - \text{четно;} \\ (-i\lambda_k)^{1/n}, & \text{если } n - \text{нечетно и } \operatorname{Im}\lambda_k \geq 0; \\ (i\lambda_k)^{1/n}, & \text{если } n - \text{нечетно и } \operatorname{Im}\lambda_k < 0, \end{cases}$$

где $\left[\rho \exp(i\varphi)\right]^{1/n} = \rho^{1/n} \exp\left(i\varphi/n\right)$,

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \frac{3\pi}{2}.$$

В рассматриваемой системе $\{u_k(x)\}$, состоящей из собственных и присоединенных функций оператора L, содержатся вместе с каждой собственной функцией все соответствующие ей присоединенные функции, причем при такой единой нумерации вслед за каждой собственной функцией стоят все соответствующие ей присоединенные функции. Собственные значения λ_k пронумерованы в порядке неубывания их абсолютных величин с учетом их кратности.

Формально сопряженный оператор к оператору L обозначим

$$L^*(z) = (-1)^n (z)^{(n)} + (-1)^{n-1}(\overline{p_1}z)^{n-1} + (-1)^{n-2}(\overline{p_2}z)^{n-2} + \ldots + \overline{p_n}z.$$

Следующие условия будем называть условиями В:

– система $\{u_k(x)\}$ полна и минимальна в $L_2(G)$;

– биортогонально сопряженная система $\{v_k(x)\}$ полна в $L_2(G)$ и состоит из собственных и присоединенных функций сопряженного оператора L^*, т.е. элементы системы $\{v_k(x)\}$ являются регулярными решениями уравнения

$$L^* v_k + \overline{\lambda}_k v_k(x) = \theta_{k+1} v_{k+1}(x),$$

где числа λ_k и θ_k имеют тот же смысл, что и в уравнении (2).

Прежде чем перейти к формулировке результатов, мы приведем теоремы о безусловной базисности систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора L вида (1), установленные И. С. Ломовым в работе [1]. Первая теорема И. С. Ломова формулируется следующим образом.

Теорема (И. С. Ломов). Пусть

– выполнены условия В;

– для любого собственного значения λ_k имеет место неравенство

$$\left|\operatorname{Im}\mu_k\right| \leq \text{const}; \tag{3}$$

– для любого $t \geq 0$ имеют место неравенства

$$\sum_{t \leq |\mu_k| \leq t+1} 1 \leq \text{const}, \tag{4}$$

$$\sum_{|\mu_k| \leq t} \left|u_k(x)\right|^2 \left\|u_k(x)\right\|_{L_2(G)}^{-2} \leq \text{const}(1+t); \tag{5}$$

$$\sum_{|\mu_k|\le t}|v_k(x)|^2\,\|v_k(x)\|^{-2}_{L_2(G)}\le \mathrm{const}(1+t);$$

– в каждой цепочке собственных и присоединенных функций операторов L и L^* выполнены оценки антиаприорного типа

$$\|u_k(x)\|_{L_2(G)}\le \mathrm{const}(1+|\mu_k|)^{n-1}\|u_{k+1}(x)\|_{L_2(G)}, \quad (6)$$

$$\|v_{k+1}(x)\|_{L_2(G)}\le \mathrm{const}(1+|\mu_k|)^{n-1}\|v_k(x)\|_{L_2(G)}. \quad (7)$$

Тогда для безусловной базисности в $L_2(G)$ системы $u_k(x)$ необходимо и достаточно выполнение равномерной оценки

$$\|u_k(x)\|_{L_2(G)}\cdot\|v_k(x)\|_{L_2(G)}\le \mathrm{const}. \quad (8)$$

Сформулируем теперь вторую теорему И. С. Ломова.

Теорема (И.С. Ломов). Пусть выполнены условия В, (3), (5)–(7),

$$\|u_k(x)\|_{L_\infty(G)}\le \mathrm{const},\qquad k=1,\ 2,\dots,$$

и длины всех цепочек присоединенных функций равномерно ограничены. Тогда необходимыми и достаточными условиями безусловной базисности в $L_2(G)$ системы $\{u_k(x)\}$ являются выполнение неравенств (4) и (8).

Аналогичные результаты для обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков установлены В. Д. Будаевым [2], В. М. Курбановым [3], [4].

Другие условия базисности Рисса корневых функций дифференциальных операторов второго порядка получены в работе [5].

В работе [4] В. М. Курбановым установлен следующий критерий базисности Рисса.

Теорема (В.М. Курбанов). Пусть выполнено условие (3), т.е. собственные значения оператора L вида (1) принадлежат параболе Карлемана. Тогда для базисности Рисса каждой из систем $\{u_k(x)\}$ и $\{v_k(x)\}$ необходимо и достаточно чтобы выполнялись условия (4)-(5) и хотя бы одна из систем $\{u_k(x)\}$, $\{v_k(x)\}$ была почти нормирована в $L_2(G)$.

Перейдем к формулировке основных результатов работы. При доказательстве нашей теоремы важную роль играет наличие оценок типа

$$\|u_k(x)\|_{L_\infty(G)}\le \mathrm{const}\cdot\|u_k(x)\|_{L_\lambda(G)}, \quad (9)$$

для каждой из биортогональных систем.

Сформулируем критерий базисности Рисса систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора L n-го порядка вида (1).

Теорема. Пусть выполнены условия В, (3), оценки (6), (7) и (9) для каждой из биортогональных систем $\{u_k(x)\}$, $\{v_k(x)\}$, причем длины всех цепочек присоединенных функций равномерно ограничены. Тогда необходимыми и достаточными условиями базисности Рисса каждой из систем $\{u_k(x)\}$ и $\{v_k(x)\}$ являются выполнение неравенств (4) и оценок

$$\|u_k(x)\|_{L_\infty(G)}\le \mathrm{const},\ \ \|v_k(x)\|_{L_\infty(G)}\le \mathrm{const}. \quad (10)$$

Доказательство. Пусть выполнены все условия теоремы. Из оценки (9) следует существование постоянной C_0, такой, что

$$\frac{\|u_k(x)\|_{L_\infty(G)}}{\|u_k(x)\|_{L_2(G)}}\le C_0. \quad (11)$$

По условию теоремы оценки типа (9) выполнены и для биортогонально сопряженной системы $\{v_k(x)\}$. Поэтому существует константа C_1, такая, что

$$\frac{\|v_k(x)\|_{L_\infty(G)}}{\|v_k(x)\|_{L_2(G)}}\le C_1. \quad (12)$$

Оценки (12) и (11) позволяют записать соотношения (5) в виде

$$\sum_{|\mu_k|\le t}|u_k(x)|^2\|u_k(x)\|^{-2}_{L_2(G)}\le\sum_{|\mu_k|\le t}C_0<C_0(1+t),$$

$$\sum_{|\mu_k|\le t}|v_k(x)|^2\|v_k(x)\|^{-2}_{L_2(G)}\le\sum_{|\mu_k|\le t}C_1<C_1(1+t).$$

Таким образом, выполнены все условия второй теоремы И.С. Ломова.

Допустим, что обе системы $\{u_k(x)\}$, $\{v_k(x)\}$ образуют базис Рисса. Тогда для элементов каждой из этих систем имеют место двусторонние оценки

$$0<\alpha_1\le\ \|u_k\|_{L_0(G)}\le\beta_1,$$

$$0<\alpha_2\le\ \|v_k\|_{L_0(G)}\le\beta_2.$$

Эти соотношения вместе с неравенствами (9) обеспечивают выполнение условий (10).

Необходимость условия (4) следует из второй теоремы И. С. Ломова.

Докажем обратное. Пусть выполнены соотношения (10). Отсюда мгновенно следует условие (8). Значит, по теореме И.С. Ломова, системы $\{u_k(x)\}$ и $\{v_k(x)\}$ образуют безусловный базис в $L_2(G)$. С другой стороны из соотношений (10) вытекает также

$$\|u_k(x)\|_{L_2(G)} \le C_2' \|u_k(x)\|_{L_\infty(G)} \le C_2, \quad (13)$$

$$\|v_k(x)\|_{L_2(G)} \le C_3' \|v_k(x)\|_{L_\infty(G)} \le C_3, \quad (14)$$

т.е. L_2 – нормы элементов каждой из систем $\{u_k(x)\}$ и $\{v_k(x)\}$ равномерно ограничены сверху. В силу биортонормированности этих систем и условия (8) имеем

$$1 = |(u_k(x), v_k(x))| \le \|u_k(x)\|_{L_2(G)} \cdot \|v_k(x)\|_{L_2(G)} \le C_4.$$

Отсюда, ввиду (14), (13), будет следовать выполнение оценок снизу

$$\|u_k(x)\|_{L_2(G)} \ge \frac{1}{C_3}, \qquad \|v_k(x)\|_{L_2(G)} \ge \frac{1}{C_2}. \quad (15)$$

Неравенства (13), (14), (15) обеспечивают почти нормированность элементов каждой из систем $\{u_k(x)\}$, $\{v_k(x)\}$.

Таким образом, мы имеем почти нормированные безусловные базисы $\{u_k(x)\}$, $\{v_k(x)\}$. По теореме Лорча [6.С. 381], такие базисы являются базисами Рисса. Теорема доказана.

Автор выражает искреннюю признательность всем участникам научного семинара под руководством д-ра физ.-мат. наук М. А.Садыбекова за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ломов И.С.* Неравенство Бесселя, теорема Рисса и безусловная базисность для корневых векторов обыкновенных дифференциальных операторов // Вестник МГУ. Сер. 1. матем. механ. 1992. №5. С. 33-43.

2. *Будаев В.Д.* Безусловная базисность систем корневых функций обыкновенных дифференциальных операторов: Дис. … докт. ф.-м. н. М., 1993. 291 с.

3. *Курбанов В.М.* Распределения собственных значений и сходимость биортогональных разложений по корневым функциям обыкновенных дифференциальных операторов: Дис. … докт. ф.-м. н. М., 210 с.

4. *Курбанов В.М.* О распределении собственных значений и критерий бесселевости корневых функций дифференциального оператора. 1 // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 4. С. 464-478.

5. *Сарсенби А.М.* Критерий базисности Рисса корневых функций дифференциального оператора второго порядка // Доклады НАН РК. 2006. № 1. С. 44-48.

6. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965. 448 с.

Резюме

Жоғары ретті дифференциалдық операторлардың түпкілікті функциялары Рисс базисі болуы үшін қажетті және жеткілікті шарттарды сол функциялардың бірқалыпты шектелгендігі түрінде беруге болатындығы көрсетілген.

Summary

New criterions of Riss basisnes of system of own and joined functions of differential operators of high orders have been proved in the work.

УДК517.927.25

Поступила 2.03.07г.