$$\sum_{|\mu_k|\le t} |v_k(x)|^2 \|v_k(x)\|_{L_2(G)}^{-2} \le \text{const}(1+t);$$

– в каждой цепочке собственных и присоединенных функций операторов L и L^* выполнены оценки антиаприорного типа

$$\|u_k(x)\|_{L_2(G)} \le \text{const}(1+|\mu_k|)^{n-1} \|u_{k+1}(x)\|_{L_2(G)}, \quad (6)$$

$$\|v_{k+1}(x)\|_{L_2(G)} \le \text{const}(1+|\mu_k|)^{n-1} \|v_k(x)\|_{L_2(G)}. \quad (7)$$

Тогда для безусловной базисности в $L_2(G)$ системы $u_k(x)$ необходимо и достаточно выполнение равномерной оценки

$$\|u_k(x)\|_{L_2(G)} \cdot \|v_k(x)\|_{L_2(G)} \le \text{const}. \quad (8)$$

Сформулируем теперь вторую теорему И. С. Ломова.

Теорема (И.С. Ломов). Пусть выполнены условия В, (3), (5)–(7),

$$\|u_k(x)\|_{L_\infty(G)} \le \text{const}, \qquad k=1,\ 2,\dots,$$

и длины всех цепочек присоединенных функций равномерно ограничены. Тогда необходимыми и достаточными условиями безусловной базисности в $L_2(G)$ системы $\{u_k(x)\}$ являются выполнение неравенств (4) и (8).

Аналогичные результаты для обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков установлены В. Д. Будаевым [2], В. М. Курбановым [3], [4].

Другие условия базисности Рисса корневых функций дифференциальных операторов второго порядка получены в работе [5].

В работе [4] В. М. Курбановым установлен следующий критерий базисности Рисса.

Теорема (В.М. Курбанов). Пусть выполнено условие (3), т.е. собственные значения оператора L вида (1) принадлежат параболе Карлемана. Тогда для базисности Рисса каждой из систем $\{u_k(x)\}$ и $\{v_k(x)\}$ необходимо и достаточно чтобы выполнялись условия (4)-(5) и хотя бы одна из систем $\{u_k(x)\}$, $\{v_k(x)\}$ была почти нормирована в $L_2(G)$.

Перейдем к формулировке основных результатов работы. При доказательстве нашей теоремы важную роль играет наличие оценок типа

$$\|u_k(x)\|_{L_\infty(G)} \le \text{const} \cdot \|u_k(x)\|_{L_\lambda(G)}, \quad (9)$$

для каждой из биортогональных систем.

Сформулируем критерий базисности Рисса систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора L n-го порядка вида (1).

Теорема. Пусть выполнены условия В, (3), оценки (6), (7) и (9) для каждой из биортогональных систем $\{u_k(x)\}$, $\{v_k(x)\}$, причем длины всех цепочек присоединенных функций равномерно ограничены. Тогда необходимыми и достаточными условиями базисности Рисса каждой из систем $\{u_k(x)\}$ и $\{v_k(x)\}$ являются выполнение неравенств (4) и оценок

$$\|u_k(x)\|_{L_\infty(G)} \le \text{const}, \quad \|v_k(x)\|_{L_\infty(G)} \le \text{const}. \quad (10)$$

Доказательство. Пусть выполнены все условия теоремы. Из оценки (9) следует существование постоянной C_0, такой, что

$$\frac{\|u_k(x)\|_{L_\infty(G)}}{\|u_k(x)\|_{L_2(G)}} \le C_0. \quad (11)$$

По условию теоремы оценки типа (9) выполнены и для биортогонально сопряженной системы $\{v_k(x)\}$. Поэтому существует константа C_1, такая, что

$$\frac{\|v_k(x)\|_{L_\infty(G)}}{\|v_k(x)\|_{L_2(G)}} \le C_1. \quad (12)$$

Оценки (12) и (11) позволяют записать соотношения (5) в виде

$$\sum_{|\mu_k|\le t} |u_k(x)|^2 \|u_k(x)\|_{L_2(G)}^{-2} \le \sum_{|\mu_k|\le t} C_0 < C_0(1+t),$$

$$\sum_{|\mu_k|\le t} |v_k(x)|^2 \|v_k(x)\|_{L_2(G)}^{-2} \le \sum_{|\mu_k|\le t} C_1 < C_1(1+t).$$

Таким образом, выполнены все условия второй теоремы И.С. Ломова.

Допустим, что обе системы $\{u_k(x)\}$, $\{v_k(x)\}$ образуют базис Рисса. Тогда для элементов каждой из этих систем имеют место двусторонние оценки

$$0<\alpha_1 \le \|u_k\|_{L_0(G)} \le \beta_1,$$

$$0<\alpha_2 \le \|v_k\|_{L_0(G)} \le \beta_2.$$

Эти соотношения вместе с неравенствами (9) обеспечивают выполнение условий (10).

Необходимость условия (4) следует из второй теоремы И. С. Ломова.

Докажем обратное. Пусть выполнены соотношения (10). Отсюда мгновенно следует