УДК 517.927.25

А. М. САРСЕНБИ

КРИТЕРИЙ БАЗИСНОСТИ РИССА КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ В ТЕРМИНАХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ В СЛУЧАЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлена академиком НАН РК Т. Ш. Кальменовым)

Рассмотрим оператор L, порожденный дифференциальным выражением

$$\lambda u = p_0(x)u'' + p_1(x)u' + p_2(x)u \qquad (1)$$

и некоторыми краевыми или нелокальными условиями на произвольном конечном интервале $G=(a,b)$. Для наших рассмотрений конкретный вид краевых условий не играет особой роли. Поэтому выражение (1) мы будем называть формально несамосопряженным дифференциальным оператором, коэффициенты которого удовлетворяют следующим условиям С:

– для некоторой внутренней точки $x_0 \in G$ вещественнозначный коэффициент $p_0(x) \geq$ $\geq \alpha > 0$ абсолютно непрерывен вместе со своей первой производной на замкнутых интервалах $[a,x_0]$ и $[x_0,b]$;

– для той же точки $x_0 \in G$ комплекснозначный коэффициент $p_1(x)$ абсолютно непрерывен на каждом отрезке $[a,x_0]$ и $[x_0,b]$;

– комплекснозначный коэффициент $p_2(x) \in$ $\in L_1(a,b)$.

Поскольку нас не интересует явный вид краевых условий, то собственные и присоединенные функции оператора L мы будем понимать в обобщенном смысле В. А. Ильина [1], а именно, системой обобщенных корневых функций (ОКФ) оператора L назовем произвольную систему комплекснозначных функций $\{u_k(x)\}$, каждая из которых абсолютно непрерывна вместе со своей первой производной на замкнутых интервалах $[c,x_0]$ и $[x_0,d]$ ($a<c<x_0<d<b$), для некоторого λ_k почти всюду в (a,x_0) и (x_0,b) удовлетворяет уравнению

$$Lu_k + \lambda_k u_k = \theta_k u_{k-1} \qquad (2)$$

и в точке разрыва x_0 удовлетворяет условиям сопряжения

$$u_k(x_0-0) = u_k(x_0+0), \qquad (3)$$

$$p_0(x_0-0)\cdot u_k'(x_0-0) =$$
$$= p_0(x_0+0)\cdot u_k'(x_0+0) + \beta u_k(x_0+0), \qquad (4)$$

где β – некоторая постоянная, $\theta_k = 0$, либо $\theta_k = 1$ (в этом случае $\lambda_k = \lambda_{k-1}$), $\theta_1 = 0$.

При $\theta_k = 0$ функцию $u_k(x)$ называем обобщенной собственной функцией, а при $\theta_k = 1$ – обобщенной присоединенной функцией.

Оператор, формально сопряженный к оператору L, обозначим следующим образом

$$L^*\upsilon = (p_0\upsilon)'' - (\overline{p}_1\upsilon)' + \overline{p}_2\upsilon .$$

Предположим, что система $\{\upsilon_k(x)\}$, биортогонально сопряженная к ОКФ $\{u_k(x)\}$, состоит из ОКФ оператора L^*.

Будем считать, что система ОКФ $\{u_k(x)\}$ пронумерованы так, что вслед за каждой обобщенной собственной функцией стоят все входящие вместе с ней в одну цепочку обобщенные присоединенные функции. Тогда ОКФ $\upsilon_k(x)$ сопряженного оператора определяются как абсолютно непрерывные функции вместе со своей первой производной в интервалах $[c,x_0]$ и $[x_0,d]$, ($a<c<x_0<d<b$), удовлетворяющие условиям, аналогичным условиям (3) и (4), возможно с другой константой β, и удовлетворяющие почти всюду в (a,x_0) и (x_0,b) уравнениям

$$L^*\upsilon_k + \overline{\lambda}_k\upsilon_k = \theta_{k+1}\upsilon_{k+1},$$

где числа λ_k и θ_k те же, что и в уравнении (2).

В работе [2] В. Д. Будаевым установлен следующий результат.

Теорема (В. Д. Будаев). Пусть $\{u_k(x)\}$ – произвольная полная в $L_2(G)$ и минимальная система ОКФ оператора L, коэффициенты которого удовлетворяют условиям С. Пусть выполняются следующие два условия:

– система $\{\upsilon_k(x)\}$, биортогонально сопряженная к системе $\{u_k(x)\}$, состоит из ОКФ сопряженного оператора L^*;

– последовательность $\{\mu_k\}$ не имеет конечных точек сгущения и существует константа M_1 такая, что для любого номера $k = 1,2,3,...$

$$|\mathrm{Im}\,\mu_k| \le M_1, \tag{5}$$

где $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$ – тот корень из комплексного числа λ_k, для которого $\mathrm{Re}\,\mu_k \ge 0$.

Тогда для безусловной базисности в $L_2(G)$ каждой из систем $\{u_k(x)\}$ и $\{\upsilon_k(x)\}$ необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств для всех номеров k

$$\sum_{t \le |\mu_k| \le t+1} 1 \le M_2, \tag{6}$$

$$\| u_k(x)\|_{L_2(G)} \cdot \| \upsilon_k(x)\|_{L_2(G)} \le M_3. \tag{7}$$

Условие (7) обычно называют условием базисности В. А. Ильина. Необходимость условия (7) для произвольных базисов, вообще говоря, не связанных с дифференциальным оператором, известна давно [3. С. 372].

Пусть y – произвольная точка интервала $[x_0, b)$. Введем новую переменную

$$t(x) = \int_y^x p_0^{-1/2}(s)ds$$

и на интервале $[t(x_0), t(b)]$ рассмотрим функции $\omega_k(t)$, определенные равенством

$$u_k(x) = \gamma_1(x) \cdot \omega_k(t), \ k = 1,2,3,...,$$

где

$$\gamma_1(x) = \left(\frac{p_0(x)}{p_0(y)}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_y^x \frac{p_1(s)}{p_0(s)} ds\right).$$

Легко проверить, что

$$Lu_k = \gamma_1(x) \cdot [\omega_k''(t) + q_1(t)\omega_k(t)]$$

и, следовательно, функции $\omega_k(t)$ являются ОКФ оператора

$$L_1\omega = \omega'' + q_1\omega,$$

заданного на интервале $(t(x_0), t(b))$ с потенциалом $q_1(t) \in L_1$.

Таким образом, для функций $\omega_k(t)$ на интервале $(t(x_0), t(b))$ справедливы оценки, полученные В.В. Тихомировым в работе [4].

Совершенно аналогично можно убедиться в справедливости результатов работы [4] на интервале $(t(a), t(x_0))$.

Так как $u_k(x) = \gamma_1(x) \cdot \omega_k(t)$, то пользуясь видом функции $\gamma_1(x)$ и условиями сопряжения (3), убеждаемся в справедливости результатов работы [4] для функции $u_k(x)$ на интервалах (x_0, b) и (a, x_0).

Итак, мы убедились, что для ОКФ оператора L вида (1) справедливы следующие оценки [4], которые при выполнении условия (5) имеют вид

$$c_1\| u_k(x)\|_{L_q(G)} \le \| u_k(x)\|_{L_s(G)} \le c_2\| u_k(x)\|_{L_q(G)}, \tag{8}$$

где $1 \le q \le s \le +\infty$.

Оценки (8) играют важную роль при доказательстве результатов настоящей статьи.

В работе [5] для двух произвольных систем функций, вообще говоря, не связанных с дифференциальным оператором, нами была установлена

Теорема 1. Пусть для элементов произвольных систем $\{u_k(x)\}$ и $\{v_k(x)\}$ выполнены условия

$$c_k = \int_G f(x)\bar{u}_k(x)dx = (f,\ u_k(x)) \to 0,$$

$$d_k = \int_G f(x)\bar{v}_k(x)dx = (f,\ v_k(x)) \to 0,$$

для любой функции $f(x) \in L_1(G)$. Тогда имеют место равномерные оценки

$$\|u_k(x)\|_{L_\infty(G)} \le M_1, \qquad \|v_k(x)\|_{L_\infty(G)} \le M_2.$$

Если указанные системы биортогональны и образуют базис Рисса, то верно и обратное.

В следующей теореме критерий базисности формулируется в терминах коэффициентов Фурье произвольной функции из класса $L_1(G)$.

Теорема 2. Пусть $\{u_k(x)\}$ – произвольная полная в $L_2(G)$ и минимальная система ОКФ оператора L, коэффициенты которого удовлетворяют условиям С. Пусть также выполняются следующие два условия:

– система $\{\upsilon_k(x)\}$, биортогонально сопряженная к системе $\{u_k(x)\}$, состоит из ОКФ сопряженного оператора L^*;

– последовательность $\{\mu_k\}$ не имеет конечных точек сгущения и существует константа M_1 такая, что для любого номера $k = 1,2,3,...$

$$|\operatorname{Im}\mu_k| \le M_1,$$

где $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$ – тот корень из комплексного числа λ_k, для которого $\operatorname{Re}\mu_k \ge 0$.

Тогда для базисности Рисса каждой из систем $\{u_k(x)\}$ и $\{\upsilon_k(x)\}$ необходимо и достаточно выполнение неравенства для всех номеров k

$$\sum_{t \le |\mu_k| \le t+1} 1 \le M', \quad \forall t \ge 0, \tag{9}$$

и условия

$$(f, u_k(x)) \to 0, \qquad (f, v_k(x)) \to 0 \tag{10}$$

для любой функции $f(x) \in L_1(G)$, где $(f, u_k(x))$, $(f, v_k(x))$ – коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы и каждая из систем $\{u_k(x)\}$ и $\{\upsilon_k(x)\}$образует базис Рисса. Тогда, в силу почти нормированности базисов Рисса в $L_2(G)$, из правой половины неравенств (8) получаем равномерную ограниченность L_∞ – норм элементов рассматриваемых систем. Согласно второй части теоремы 1 из базисности Рисса и равномерной ограниченности L_∞ – норм элементов каждой из рассматриваемых систем следуют условия (10).

Необходимость условия (9) следует из теоремы В. Д. Будаева.

Для доказательства достаточности условий (9), (10) применяем первую часть теоремы 1. Так, согласно утверждению этой теоремы, из (10) вытекает равномерная ограниченность L_∞ – норм элементов каждой из систем $\{u_k(x)\}$ и $\{\upsilon_k(x)\}$, т.е. справедливость оценок (7). Значит выполнены все условия теоремы В. Д. Будаева, согласно которой мы имеем, что обе рассматриваемые системы являются безусловными базисами. С другой стороны из равномерной ограниченности элементов систем $\{u_k(x)\}$ и $\{\upsilon_k(x)\}$ и неравенств (7) следуют почти нормированность в $L_2(G)$ этих систем. Таким образом, рассматриваемые нами системы являются безусловными почти нормированными базисами. По теореме Лорча [3. С. 381], такие базисы будут базисами Рисса. Теорема доказана.

Автор выражает искреннюю признательность всем участникам научного семинара под руководством д-ра физ.-мат. наук М. А. Садыбекова за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин В.А.* О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка // Доклады АН СССР. 1983. Т. 273, № 5. С. 1048-1053.

2. *Будаев В.Д.* О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций оператора второго порядка с разрывными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, №6. С. 941-952.

3. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965. 448 с.

4. *Тихомиров В.В.* Точные оценки регулярных решений одномерного уравнения Шредингера со спектральным параметром // Доклады АН СССР. 1983. Т. 273, №4. С. 807-810.

5. *Сарсенби А.М.* Критерий базисности Рисса корневых функций дифференциального оператора второго порядка // Доклады НАН РК. 2006. № 1. С. 44-48.

Резюме

Түпкілікті функциялардың Рисс базистігінің критерийі жіктелетін функциялардың Фурье коэффициенттеріне қойылатын шарттар түрінде берілген.

Summary

Criterion of Riss basisnes of root functions in Fourier coefficients' terms have been got in the work.

Поступила 2.03.07г.