Б. ЧЕЧЕЙБАЕВ

НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В СОПЛЕ ЛАВАЛЯ

Рассмотрим нестационарные околозвуковые течения газа в пространстве, основываясь на нелинейном уравнении в частных производных второго порядка относительно потенциала скорости $\varphi(x, y, z, t)$, которое представляется в следующем виде [1]:

$$\varphi_{tt} + 2(u\varphi_{tx} + \vartheta\varphi_{ty} + w\varphi_{tz}) + 2(u\vartheta\varphi_{xy} + uw\varphi_{xz} + \vartheta w\varphi_{yz}) -$$

$$-(a^2 - u^2)\varphi_{xx} - (a^2 - \vartheta^2)\varphi_{yy} - (a^2 - w^2)\varphi_{zz} = 0, \qquad (1)$$

где $u = \varphi_x$, $\vartheta = \varphi_y$, $w = \varphi_z$ – составляющие вектора скорости потока.

Как известно, изоэнтропические безвихревые течения имеют первый интеграл в форме интеграла Лагранжа-Коши:

$$\varphi_t + \frac{v^2}{2} + \overline{w} = const, \qquad (2)$$

где через *w* обозначена удельная энтальпия газа, определяемая формулой

$$\overline{w} = \frac{a^2}{\chi - 1}. \qquad (3)$$

Здесь $\chi = {C_p}/{C_v}$ – отношение удельных теплоемкостей газа при постоянном давлении и объеме, a^2 – квадрат скорости звуковых волн. Подставляя далее (3) в интеграл Лагранжа-Коши, получаем выражение для a^2, которое выглядит так:

$$a^2 = \frac{\chi+1}{2}a_*^2 - \frac{\chi-1}{2}(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2)-(\chi-1)\varphi_t\,, \tag{4}$$

где a_* – критическая скорость и имеет место в тех точках потока, где скорость частиц равна скорости звука. Подставляя выражение (4) для квадрата скорости в уравнение Эйлера (1) и проведя алгебраические преобразований, получаем:

$$\begin{gathered}(a_*^2 - h^2(\varphi_y^2+\varphi_z^2)-\varphi_x^2-2h^2\varphi_t)\varphi_{xx} + (a_*^2 - h^2(\varphi_x^2+\varphi_z^2)-\varphi_y^2-2h^2\varphi_t)\varphi_{yy} + \\ +(a_*^2 - h^2(\varphi_x^2+\varphi_y^2)-\varphi_z^2-2h^2\varphi_t)\varphi_{zz} - \frac{4}{\chi+1}(\varphi_x\varphi_{tx}+\varphi_y\varphi_{ty}+\varphi_z\varphi_{tz}) - \\ -\frac{4}{\chi+1}(\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy}+\varphi_x\varphi_z\varphi_{xz}+\varphi_y\varphi_z\varphi_{yz}) - \frac{2}{\chi+1}\varphi_{tt} = 0\,.\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь $h^2 = \dfrac{\chi-1}{\chi+1}$.

Таким образом, наличие интеграла Лагранжа-Коши позволяет свести задачу расчета об изэнтропических безвихревых течениях газа к изучению одного дифференциального уравнения второго порядка относительно потенциала скорости (5). Интегрирование полученного таким путем квазилинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка относительно $\varphi(x,y,z,t)$ представляет значительные математические трудности, связанные с нелинейностью и нестационарностью уравнения, а также трехмерностью течений.

Перейдем теперь к выводу приближенных уравнений, описывающих течения в околозвуковом диапазоне скоростей.

Будем считать, что скорости частиц близки по величине к критической скорости a_*, а углы между направлением вектора скорости и горизонтальной осью малы. Предположим, что на бесконечности вверх по течению поток является поступательным, тогда решение уравнения (5), удовлетворяющее начальным и краевым условиям

$$\begin{gathered}\varphi(x,y,z,0) = \psi_0(x,y,z)\,, \\ \varphi(x,0,z,t) = \psi_1(x,z,t)\,,\ \ \varphi(x,y,0,t) = \psi_2(x,y,t)\,, \\ \varphi_x(x,y,0,t) = \psi_3(x,y,t)\end{gathered} \tag{6}$$

с достаточно гладкими функциями $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$, можно представить в следующем виде:

$$\varphi(x,y,z,t) = a_*(x+\widetilde{\varphi}(x,y,z,t))\,. \tag{7}$$

Потенциал скорости возмущения $\widetilde{\varphi}(x,y,z,t)$ будем искать в виде ряда по степеням малого параметра ε:

$$\widetilde{\varphi}(x,y,z,t) = \sum_{k=0}^{n}\varepsilon^{k+1}\varphi_k(x,y,z,t)\,, \tag{8}$$

где ε – малый параметр, в качестве которого можно взять величину

$$\varepsilon = 1 - M_\infty^2\,.$$

Здесь M_∞ – число Маха на бесконечности вверх по течению. Применим далее преобразования переменных x, y, z, t в следующей форме:

$$x = \tilde{x}\,,\quad y = \varepsilon^{-1/2}\tilde{y}\,,\quad z = \varepsilon^{-1/2}\tilde{z}\,,\quad t = \varepsilon^{-1}a_*^{-1}\tilde{t}\,.$$

Подставляя потенциалы скорости (8), (7) в уравнение Эйлера (5) и группируя члены при одинаковых степенях малого параметра ε, приравнивая далее их нулю, получаем $n+1$ дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Приведем здесь лишь четыре приближения уравнения Эйлера (5), решениями которых являются приближения потенциала скорости возмущения $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и т.д.:

$$-(\chi+1)\varphi_{0x}\varphi_{0xx} + \varphi_{0\tilde{y}\tilde{y}} + \varphi_{0\tilde{z}\tilde{z}} - 2\varphi_{0xt} = 0\,, \tag{9}$$

$$-(\chi+1)(\varphi_{0x}\varphi_{1xx} + \varphi_{0xx}\varphi_{1x}) + \varphi_{1\tilde{y}\tilde{y}} + \varphi_{1\tilde{z}\tilde{z}} - 2\varphi_{1x\tilde{t}} =$$

$$= \frac{\chi+1}{2}\varphi_{0x}^2\varphi_{0xx} + 2(\varphi_{0x\tilde{y}}\varphi_{0\tilde{y}} + \varphi_{0x\tilde{z}}\varphi_{0\tilde{z}}) + (\chi-1)(\varphi_{0\tilde{t}}\varphi_{0xx} + \varphi_{0x}(\varphi_{0\tilde{y}\tilde{y}} + \varphi_{0\tilde{z}\tilde{z}})) + 2\varphi_{0x}\varphi_{\tilde{t}x} + \varphi_{0\tilde{t}\tilde{t}}\,. \tag{10}$$

$$-(\chi+1)(\varphi_{0xx}\varphi_{2x} + \varphi_{0x}\varphi_{2xx}) + \varphi_{2\tilde{y}\tilde{y}} + \varphi_{2\tilde{z}\tilde{z}} - 2\varphi_{2x\tilde{t}} = (\chi+1)(\varphi_{0x}\varphi_{1x}\varphi_{0xx} + (\varphi_{1x} + \frac{1}{2}\varphi_{0x}^2)\varphi_{1xx}) +$$

$$+(\chi+1)\left[\left(\frac{1}{2}\varphi_{0\tilde{y}}^2 + \frac{1}{2}\varphi_{0\tilde{z}}^2\right)\varphi_{0xx} + \varphi_{1\tilde{t}}\varphi_{0xx} + \varphi_{0\tilde{t}}\varphi_{1xx}\right] +$$

$$+(\chi+1)\left[\left(\frac{1}{2}\varphi_{0x}^2 + \varphi_{1x} + \varphi_{0\tilde{t}}\right)\varphi_{0\tilde{y}\tilde{y}} + \varphi_{0x}\varphi_{1\tilde{y}\tilde{y}}\right] + (\chi-1)\left[\left(\frac{\varphi_{0x}^2}{2} + \varphi_{1x} + \varphi_{0\tilde{t}}\right)\varphi_{0\tilde{z}\tilde{z}} +\right.$$

$$\left. + \varphi_{0x}\varphi_{1\tilde{z}\tilde{z}}\right] + 2\varphi_{0x\tilde{y}}\varphi_{1\tilde{y}} + \varphi_{1x\tilde{y}}\varphi_{0\tilde{y}} + \varphi_{0x\tilde{z}}\varphi_{1\tilde{z}} + \varphi_{1x\tilde{z}}\varphi_{0\tilde{z}} +$$

$$+\varphi_{0x}(\varphi_{0x\tilde{y}}\varphi_{0\tilde{y}} + \varphi_{0x\tilde{z}}\varphi_{0\tilde{z}})) + 2(\varphi_{0x}\varphi_{1\tilde{t}x} + \varphi_{1x}\varphi_{0\tilde{t}x} + \varphi_{0\tilde{y}}\varphi_{0\tilde{t}y} + \varphi_{0\tilde{z}}\varphi_{0\tilde{t}\tilde{z}}) + \varphi_{1\tilde{t}\tilde{t}}\,. \tag{11}$$

$$-(\chi+1)(\varphi_{0xx}\varphi_{3x} + \varphi_{0x}\varphi_{3xx}) + \varphi_{3\tilde{y}\tilde{y}} + \varphi_{3\tilde{z}\tilde{z}} - 2\varphi_{3x\tilde{t}} =$$

$$= (\chi+1)[(\varphi_{0x}\varphi_{2x} + \frac{1}{2}\varphi_{1x}^2)\varphi_{0xx} + \varphi_{0x}\varphi_{1x}\varphi_{1xx} + \frac{1}{2}\varphi_{0x}^2\varphi_{2xx}] +$$

$$+(\chi+1)[\varphi_{2x}\varphi_{1xx} + \varphi_{1x}\varphi_{2xx}] + (\chi+1)\left[(\varphi_{1\tilde{y}}\varphi_{0\tilde{y}} + \varphi_{1\tilde{z}}\varphi_{0\tilde{z}} + \varphi_{2\tilde{t}})\varphi_{0xx} +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2}(\varphi_{0\tilde{y}}^2 + \varphi_{0\tilde{z}}^2) + \varphi_{1\tilde{t}}\right)\varphi_{1xx} + \varphi_{0\tilde{t}}\varphi_{2xx}\right] + (\chi-1)\times \tag{12}$$

$$\times\left[\left(\varphi_{2x} + \varphi_{0x}\varphi_{1x} + \frac{1}{2}\varphi_{0\tilde{z}}^2 + \varphi_{1\tilde{t}}\right)\varphi_{0\tilde{y}\tilde{y}} + \left(\varphi_{1x} + \frac{1}{2}\varphi_{0x}^2 + \varphi_{0\tilde{t}}\right)\varphi_{1\tilde{y}\tilde{y}} + \varphi_{0x}\varphi_{2\tilde{y}\tilde{y}}\right] +$$

$$+(\chi-1)\left[\left(\varphi_{2x} + \varphi_{0x}\varphi_{1x} + \frac{1}{2}\varphi_{0\tilde{y}}^2 + \varphi_{1\tilde{t}}\right)\varphi_{0\tilde{z}\tilde{z}} + \left(\varphi_{1x} + \frac{1}{2}\varphi_{0x}^2 + \varphi_{0\tilde{t}}\right)\varphi_{1\tilde{z}\tilde{z}} + \varphi_{0x}\varphi_{2\tilde{z}\tilde{z}}\right] +$$

$$+\frac{1}{2}(\chi+1)\varphi_{0\tilde{y}}^2\varphi_{\tilde{y}\tilde{y}} + \frac{1}{2}(\chi+1)\varphi_{0\tilde{z}}^2\varphi_{0\tilde{z}\tilde{z}} + 2(\varphi_{0x\tilde{y}}\varphi_{2\tilde{y}} + \varphi_{1x\tilde{y}}\varphi_{1\tilde{y}} + \varphi_{2x\tilde{y}}\varphi_{0\tilde{y}}) +$$

$$+2(\varphi_{0x\tilde{z}}\varphi_{2\tilde{z}} + \varphi_{1x\tilde{z}}\varphi_{1\tilde{z}} + \varphi_{2x\tilde{z}}\varphi_{0\tilde{z}}) + 2\left[\varphi_{1x}(\varphi_{0x\tilde{y}}\varphi_{0\tilde{y}} + \varphi_{0x\tilde{z}}\varphi_{0\tilde{z}}) + \varphi_{0x}(\varphi_{0x\tilde{y}}\varphi_{1\tilde{y}} +\right.$$

$$\left. + \varphi_{1x\tilde{y}}\varphi_{0\tilde{y}} + \varphi_{0x\tilde{z}}\varphi_{1\tilde{z}} + \varphi_{1x\tilde{z}}\varphi_{0\tilde{z}})\right] + 2\varphi_{0\tilde{y}\tilde{z}}\varphi_{0\tilde{y}}\varphi_{0\tilde{z}} + 2\left[\varphi_{0x}\varphi_{2\tilde{t}x} + \varphi_{1x}\varphi_{1\tilde{t}x} + \varphi_{2x}\varphi_{0\tilde{t}x} +\right.$$

$$\left. + \varphi_{0\tilde{y}}\varphi_{1\tilde{t}\tilde{y}} + \varphi_{0\tilde{z}}\varphi_{1\tilde{t}\tilde{z}} + \varphi_{1\tilde{y}}\varphi_{0\tilde{t}\tilde{y}} + \varphi_{1\tilde{z}}\varphi_{0\tilde{t}\tilde{z}}\right] + \varphi_{2\tilde{t}\tilde{t}}\,.$$

Аналогичным образом, приравнивая нулю выражения при одинаковых степенях малого параметра ε и преобразуя их, получим дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка, позволяющие определить последующие приближения потенциала возмущения в формальном ряду (8) – $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \ldots, \varphi_n$. Полученные линейные дифференциальные уравнения (10)–(12) и последующие приближения к основному уравнению газовой динамики (5) можно представить в виде рекуррентно составляемых и интегрируемых систем дифференциальных уравнений в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&-(\chi+1)(\varphi_{0xx}\varphi_{nx}+\varphi_{0x}\varphi_{nxx})+\varphi_{n\tilde{y}\tilde{y}}+\varphi_{n\tilde{z}\tilde{z}}-2\varphi_{nx\tilde{t}}=\\
&=\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{\chi+1}{2}\varphi_{ixx}\varphi_{n-1-i}+2\varphi_{ix\tilde{y}}\varphi_{(n-1-i)\tilde{y}}+2\varphi_{ix\tilde{z}}\varphi_{(n-1-i)\tilde{z}}+\right.\\
&\left.+(\chi-1)(\varphi_{i\tilde{y}\tilde{y}}+\varphi_{i\tilde{z}\tilde{z}})\varphi_{(n-1-i)x}\right]+(\chi-1)\sum_{i=0}^{n-1}\varphi_{i\tilde{t}}\varphi_{(n-1-i)xx}+2\sum_{i=0}^{n-1}\varphi_{ix}\varphi_{(n-1-i)\tilde{t}x}+\\
&+\sum_{i=0}^{n-2}\left[\frac{\chi-1}{2}(\varphi_{ixx}(G_{n-2-i}+D_{n-2-i})+\varphi_{n-2-i}(\varphi_{i\tilde{y}\tilde{y}}+\varphi_{i\tilde{z}\tilde{z}}))\right]+\\
&+\sum_{i=0}^{n-2}(\chi+1)\varphi_{(n-1-i)x}\varphi_{(i+1)xx}+2\sum_{i=0}^{n-2}\varphi_{(n-2-i)x}(\Phi_i+\psi_i)+\\
&+\sum_{i=0}^{n-2}\varphi_{i\tilde{y}}\varphi_{(n-2-i)\tilde{t}\tilde{y}}+\varphi_{i\tilde{z}}\varphi_{(n-2-i)\tilde{t}\tilde{z}})+(\chi-1)\sum_{i=0}^{n-2}\varphi_{i\tilde{t}}(\varphi_{(n-2-i)\tilde{y}\tilde{y}}+\varphi_{(n-2-i)\tilde{z}\tilde{z}})+\\
&+\sum_{i=0}^{n-3}\frac{\chi+1}{2}(\varphi_{i\tilde{y}\tilde{y}}G_{n-3-i}+\varphi_{i\tilde{z}\tilde{z}}D_{n-3-i})+\sum_{i=0}^{n-3}\frac{\chi-1}{2}(\varphi_{i\tilde{y}\tilde{y}}D_{N-3-I}+\varphi_{I\tilde{z}\tilde{z}i}G_{n-3-i})+2\sum_{i=0}^{n-3}(\varphi_{i\tilde{y}\tilde{z}}R_{n-3-i}+\varphi_{(n-1)\tilde{t}\tilde{t}}\,.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

В рекуррентной системе дифференциальных уравнений (13) введены следующие обозначения для функций $\Phi_i, \psi_i, D_i, R_i, G_i$ ($i=0,1,2,\ldots$), которые также последовательно выражаются через частные производные потенциала скорости возмущения и используются при составлении выражений, содержащихся в правой части системы (13):

$$
\begin{aligned}
&\Phi_i=\Phi_m=\sum_{k=0}^{m}\varphi_{kx\tilde{y}}\varphi_{(m-k)\tilde{y}}\,,\quad \psi_i=\psi_m=\sum_{k=0}^{m}\varphi_{kx\tilde{z}}\varphi_{(m-k)\tilde{z}}\\
&\varphi_m=\frac{1}{m\varphi_{0x}}\sum_{k=1}^{m}(3k-m)\varphi_{kx}\varphi_{m-k}\,,\\
&D_{n-2-i}=D_m=\frac{1}{m\varphi_{0\tilde{z}}}\sum_{k=1}^{m}(3k-m)\varphi_{k\tilde{z}}D_{m-k}\,,\\
&G_{n-2-i}=G_m=\frac{1}{m\varphi_{0\tilde{z}}}\sum_{k=1}^{m}(3k-m)\varphi_{k\tilde{y}}G_{m-k}\,,\\
&R_{n-2-i}=R_m=\sum_{k=0}^{m}\varphi_{k\tilde{y}}\varphi_{(m-k)\tilde{z}}\,,\quad \varphi_0=\varphi_{0x}^2,\quad G_0=\varphi_{0\tilde{y}}^2,\quad D_0=\varphi_{0\tilde{z}}^2\,.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Полученное уравнение (9) является фундаментальным уравнением для изучения нестационарных движений газа с околозвуковыми скоростями и называется уравнением Линя-Рейснера-Цзяня. Уравнение (9) является нелинейным, принцип суперпозиции решений по отношению к нему неприменим, но, тем не менее, оно значительно проще полного уравнения (5), определяющего потенциал скорости $\varphi(x,y,z,t)$.

Для решения задач внешней и внутренней трансзвуковой аэродинамики необходимо определить точные решения уравнения Линя-Рейснера-Цзяня в форме (9) и далее найти необходимые приближения из полученной в данной работе рекуррентной системы дифференциальных уравнений.

Уравнение Линя-Рейсснера-Цзяня (9) преобразуем к следующему виду:

$$-\varphi_{0x}\varphi_{0xx} + \varphi_{0yy} + \varphi_{0zz} - 2\varphi_{0xt} = 0, \qquad (15)$$

Уравнение (15) принадлежит к смешанному типу дифференциальных уравнений. Оно эллиптично в области, соответствующей дозвуковому течению, т.е. при $\varphi_{0x} < 0$ и гиперболично в области сверхзвукового течения, т.е. при $\varphi_{0x} > 0$.

Будем искать решение уравнения Линя-Рейсснера-Цзяня (15) в следующем виде:

$$\varphi_0(x,y,z,t) = f(\tilde{u}) + dx^2 + my^4 + nz^4 + sxe^{-\lambda t} + \gamma(y^2 + z^2)e^{-\lambda t}, \qquad (16)$$

где $\tilde{u} = ax + by^2 + cz^2 + ke^{-\lambda t}$ – новая переменная. Здесь $d, m, n, s, \gamma, a, b, c, k, \lambda$ – постоянные величины, $f(u)$ – неизвестная функция.

Если существуют соотношения между указанными величинами такие, что

$$a = d^2,\ \ b = c = -\frac{1}{2}d^3,\ \ m = n = \frac{1}{6}d^3,\ \ s = \frac{2k(1+n_1)}{d},\ \ \gamma = -n_1^2 k,\ \ \lambda = n_1 d,$$

где n_1, d, k – произвольные постоянные, то потенциал скорости приводится к следующему виду:

$$\varphi_0(x,y,z,t) = f(\tilde{u}) + dx^2 + \frac{1}{6}d^3(y^4 + z^4) + \frac{2k(1+n_1)}{d}xe^{-n_1 dt} - n_1^2 k(y^2 + z^2)e^{-n_1 dt}, \qquad (17)$$

$$\tilde{u} = d^2 x - \frac{1}{2}d^3(y^2 + z^2) + ke^{-n_1 dt}. \qquad (18)$$

Подставляя соответствующие частные производные потенциала скорости $\varphi_0(x,y,z,t)$ (17) в (15), относительно неизвестной функции $f(\tilde{u})$ получаем нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$d^6 f'(\tilde{u})f''(\tilde{u}) + 2d^3\tilde{u}f''(\tilde{u}) + 4d^3 f'(\tilde{u}) + 4\tilde{u} = 0 \qquad (19)$$

Далее, интегрируя полученное дифференциальное уравнение (19), находим решение:

$$f(\tilde{u}) = \frac{d^3 C_0}{4} - \frac{3+\sqrt{5}}{2d^3}u^2, \qquad (20)$$

где C_0 – постоянная интегрирования.

В общем случае дифференциальное уравнение (19) интегрируется в неявном виде, здесь рассматривается частный случай, когда вторая постоянная интегрирования равна нулю: $\tilde{c} = 0$.

Подставляя найденное решение (20) в (17) и учитывая (18), определяем потенциал скорости $\varphi_0(x,y,z,t)$ течения газа, удовлетворяющего уравнению Линя-Рейснера-Цзяня (15):

$$\varphi_0(x,y,z,t) = -\frac{(1+\sqrt{5})}{2}dx^2 + \frac{3+\sqrt{5}}{2}d^2x(y^2+z^2) - \frac{(5+3\sqrt{5})}{24}d^3(y^4+z^4) -$$

$$-\frac{3+\sqrt{5}}{4}d^2y^2z^2\,\frac{C_0 d^3}{4} - \frac{(3+\sqrt{5})}{d^3}k(dx^2 - \frac{1}{2}d^3(y^2+z^2))e^{-n_1 dt} - \frac{(3+\sqrt{5})}{2d^3}k^2 e^{-2n_1 dt} +$$

$$+\frac{2k(1+n_1)}{d}xe^{-n_1 dt} - n_1^2 k(y^2+z^2)e^{-n_1 dt}. \qquad (21)$$

Найденным решением описывается пространственное нестационарное потенциальное течение Мейеровского типа в сопле Лаваля.

Составляющие вектора скорости движения частиц газа в сопле определяются так:

$$u = -(1+\sqrt{5})dx + \frac{3+\sqrt{5}}{2}d^2(y^2+z^2) + (2n_1 - 1 - \sqrt{5})\frac{k}{d}e^{-n_1 dt},$$

$$\vartheta = (3+\sqrt{5})d^2xy - \frac{5+3\sqrt{5}}{6}d^3y^3 - \frac{3+\sqrt{5}}{2}d^3yz^2 + (3+\sqrt{5}-2n_1^2)kye^{-n_1 dt}, \quad (22)$$

$$w = (3+\sqrt{5})d^2xz - \frac{5+3\sqrt{5}}{6}d^3z^3 - \frac{3+\sqrt{5}}{2}d^3y^2z + (3+\sqrt{5}-2n_1^2)kze^{-n_1 dt}.$$

Уравнение звуковой поверхности, через которую осуществляется переход течения от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым, определяется из условия

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = u = 0. \quad (23)$$

Приравнивая к нулю горизонтальную составляющую скорости, находим уравнение звуковой поверхности в виде

$$x = -\frac{3+\sqrt{5}}{2(1+\sqrt{5})}d_1(y^2+z^2) + \frac{2n_1 - 1 - \sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})d_1^2}e^{n_1 dt}. \quad (24)$$

Полагаем, что направление движения потока газа совпадает с положительным направлением оси абсцисс OX, тогда $d = d_1$, $d_1 < 0$ и $n_1 < 0$. Из формулы (24) видно, что поверхностью перехода через скорость звука является параболоид вращения, который является выпуклым в сторону сверхзвуковой области и меняется со временем, при $t \to \infty$ из (21) получается решение, описывающее пространственное стационарное околозвуковое течение газа в окрестности горловины сопла Лаваля, изученное детально в работе [2].

Решение уравнения (15) будем искать в автомодельном виде

$$\varphi_0(x,y,z,t) = \theta^{3n-2}f(\xi,\eta), \quad (25)$$

где переменные ξ,η,θ выражаются через x,y,z,t следующим образом:

$$\xi = x\theta^{-n},\ \eta = t\theta^{n-2},\ \theta = ay + bz. \quad (26)$$

Здесь n – показатель автомодельности, a,b – произвольные постоянные.

Подставляя предполагаемый вид решений (25) в рассматриваемое уравнение (15), приведем его к нелинейному дифференциальному уравнению относительно неизвестной нам функции $f(\xi,\eta)$, зависящей от двух независимых переменных ξ,η:

$$[n^2(a^2+b^2)\xi^2 - f_\xi]f_{\xi\xi} - 5n(n-1)(a^2+b^2)\xi f_\xi + 7(n-2)(n-1)(a^2+b^2)\eta f_\eta -$$
$$-2[1+n(n-2)(a^2+b^2)\xi\eta]f_{\xi\eta} + (n-2)^2(a^2+b^2)\eta^2 f_{\eta\eta} = 0. \quad (27)$$

Предполагая, что выполняется условие $a^2+b^2=1$, последнее уравнение перепишем в следующем виде:

$$(n^2\xi^2 - f_\xi)f_{\xi\xi} - 5n(n-1)\xi f_\xi + 7(n-2)(n-1)\eta f_\eta - 2[1+n(n-2)\xi\eta]f_{\xi\eta} + (n-2)^2\eta^2 f_{\eta\eta} = 0. \quad (28)$$

Нахождение точного аналитического решения нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка (28) для любых значений показателя автомодельности "n"

представляет значительные математические трудности, связанные с нелинейностью рассматриваемого уравнения. Однако при некоторых конкретных значениях показателя автомодельности n удается определить решения, удовлетворяющие уравнению (28).

Пусть теперь показатель автомодельности будем равен двум, тогда согласно дифференциальному уравнению (28), имеем:

$$(4\xi^2 - f_\xi) f_{\xi\xi} - 10\xi f_\xi - 2 f_{\xi\eta} = 0 . \qquad (29)$$

Полученное нелинейное дифференциальное уравнение интегрируется в квадратурах и найденное решение уравнения Линя-Рейсснера-Цзяня имеет следующий вид:

$$\varphi_0(x, y, z, t) = (x^2 + 2x\theta^2 + \frac{1}{3}\theta^4)\frac{C_1}{C_1 - e^{-t}} . \qquad (30)$$

Осуществляя переход к прежним физическим переменным x, y, z, t, получаем:

$$\varphi_0(x, y, z, t) = \{x^2 + 2x(a^2y^2 + 2abyz + b^2z^2) +$$

$$+\frac{1}{3}(a^4y^4 + 4a^3by^3z + 6a^2b^2y^2z^2 + 4ab^3z^3y + b^4z^4\}\frac{C_1}{C_1 - e^{-t}} . \qquad (31)$$

Полученное решение описывает пространственное нестационарное течение Мейеровского типа в сопле Лаваля. Поток газа во входе, до горловины сопла, имеет дозвуковую скорость и при выходе, расширяясь, приобретает сверхзвуковую скорость. Как видно из полученного решения (31), в предельном случае, при $t \to \infty$, имеем установившееся пространственное течение газа, через которое осуществляется переход от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым потокам, определяемое из условия $\varphi_{0x} = 0$ и имеет следующий вид:

$$x = -(ay + bz)^2 . \qquad (32)$$

Полученное решение (31) содержит параметры a, b и постоянную интегрирования C_1, которые определяют изменение размеров и формы горловины сопла.

Течение через круглое сопло можно получить, положив в найденном решении $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Из формулы (32) видно, что поверхностью перехода через скорость звука является параболоид вращения, который как и в плоских соплах, выпукл в сторону сверхзвуковых скоростей, а также, являясь стационарным, не зависит от времени t.

Составляющие вектора скорости движения частиц газа согласно потенциалу скорости (31) определяются следующим образом:

$$u = (x + (ay + bz)^2)\frac{C_1}{C_1 - e^{-t}},$$

$$\vartheta = \{4x(8a^2y + abz) + \frac{4}{3}(a^4y^3 + 3a^3by^2z + 3a^2b^2z^2y + ab^3z^3)\}\frac{C_1}{C_1 - e^{-t}}, \qquad (33)$$

$$w = \{4x(8aby + b^2z) + \frac{4}{3}(a^3by^3 + 3a^3b^2y^2z + 3ab^3z^2y + b^4z^3)\}\frac{C_1}{C_1 - e^{-t}} .$$

Квадрат скорости звуковых волн определяется из интеграла Лагранжа-Коши (4). Используя выражения (35), (33) и воспользуясь известными формулами, можно исследовать распределения давления и плотности частиц газа в сопле Лаваля.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987.

2. *Рыжов О.С.* Исследование трансзвуковых течений в соплах Лаваля. М.: ВЦ АН СССР, 1965.

Summary

The spatial non-stationary gas flows in around sound velocity range are by methods of mathematical physics considered. The recurrence differential equations for approach of Euler gas dynamics equations are by methods of mathematical physics obtained. The analytical decisions of Lin-Reissner-Tsien equation are by automodel variables method determined.

УДК 533.6

КНУ им. Ж. Баласагына,
г. Бишкек

Поступила 2.06.07г.