

УДК 532. 517. 4

Б. П. УСТИМЕНКО

## ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА И КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНОМ СЛЕДЕ ЗА ЦИЛИНДРОМ

Выполнен анализ процессов турбулентного переноса в плоском следе за цилиндром. Проведены расчеты условных и полных средних статистических характеристик динамического и температурного поля в условиях перемежаемости турбулентной и не турбулентной жидкости. Результаты расчета сопоставлены с опытными данными.

Струйные течения в следе за плохообтекаемыми телами широко распространены на практике. Аэродинамические стабилизаторы горения, различного типа теплообменники и др., основанные на их применении, широко используются в энергетике, химической технологии и других отраслях промышленности. Наиболее детально исследование закономерностей аэродинамики плоского турбулентного следа за цилиндром было проведено Таунсендом [1]. В его работе были получены подробные профили средней скорости и температуры, а также кинетической энергии и интенсивностей пульсаций скорости в различных поперечных сечениях турбулентного следа. Позднее в работах [2,3] эти результаты были дополнены новыми экспериментальными данными, включающими наряду с полными средними значениями также и условные средние значения статистических характеристик по каждой из перемежающихся областей турбулентной и не турбулентной жидкости. Что касается аналитического расчета аэродинамики турбулентного течения в следе, то он охватывает лишь полные средние характеристики течения, полученные на основе применения уравнений Рейнольдса, и не учитывает условия перемежаемости турбулентной и не турбулентной жидкости – одного из основных свойств турбулентных течений [4]. В статье приводятся результаты расчета условных (по каждой из перемежающихся сред турбулентной и не турбулентной жидкости) и полных средних статистических характеристик турбулентных течений в плоском следе за цилиндром. Результаты расчетов сопоставлены с имеющимися экспериментальными данными.

**Основные уравнения и гипотезы замыкания.** Рассмотрим турбулентное течение несжимаемой жидкости в плоском следе за цилиндром. Начало координат расположим в центре на оси

цилиндра, а скорость набегающего потока обозначим  $u_\infty$ .

Вводя избыточную скорость  $u_1 = u - u_\infty$  и полагая  $u_1 \ll u_\infty$  после пренебрежения малыми членами преобразуем систему уравнений движения, теплообмена, энергии турбулентности и интенсивности пульсаций температуры [5, 6] к виду:

$$\begin{aligned} u_\infty \frac{\partial \langle u_1 \rangle_r}{\partial x} &= - \frac{\partial \langle u'v' \rangle_r}{\partial y}, \\ u_\infty \frac{\partial \langle t \rangle_r}{\partial x} &= - \frac{\partial \langle v't' \rangle_r}{\partial y}, \\ \frac{\partial \langle u_1 \rangle_r}{\partial x} + \frac{\partial \langle v \rangle_r}{\partial y} &= 0, \\ u_\infty \frac{\partial \langle E \rangle_r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \langle (E + \frac{p'}{\rho})v' \rangle_r + \\ + v \langle \frac{\partial u'}{\partial y} \frac{\partial u'}{\partial y} \rangle_r - \langle u'v' \rangle_r \frac{\partial \langle u_1 \rangle_r}{\partial y} &, \\ u_\infty \frac{\partial \langle t'^2 \rangle_r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \langle v't'^2 \rangle_r + \\ + 2v \langle \frac{\partial t'}{\partial y} \frac{\partial t'}{\partial y} \rangle_r - \langle v't' \rangle_r \frac{\partial \langle t \rangle_r}{\partial y} &. \quad (1) \end{aligned}$$

Здесь индекс  $r = t$  соответствует турбулентной,  $r = 0$  – не турбулентной жидкости,  $\langle u_1 \rangle$ ,  $\langle v \rangle$ ,  $\langle u'v' \rangle$ ,  $\langle t \rangle$ ,  $\langle v't' \rangle$  – условные средние скорости, касательного напряжения трения, температуры и теплового потока,  $\langle E \rangle$ ,  $\langle t'^2 \rangle$  – кинетической энергии пульсаций и среднеквадратичной пульсации температуры. Для замыкания уравнений (1) воспользуемся известными гипотезами [6,7,8] примем, в частности, что перенос импульса и тепла осуществляется диффузией градиентного типа, а учет дополнительного

переноса пульсационной энергии и тепла крупномасштабным вихревым движением производится с помощью коэффициента  $c_0$  [4].

$$\begin{aligned} -\langle u'v' \rangle &= \varepsilon \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial y}, \quad -\langle v't' \rangle = c_0 \varepsilon \frac{\partial \langle t \rangle}{\partial y}, \\ -\langle v't'^2 \rangle &= c_0 \varepsilon \frac{\partial \langle t'^2 \rangle}{\partial y}, \\ 2v \langle \frac{\partial t'}{\partial y} \frac{\partial u'}{\partial y} \rangle &= \frac{\langle t'^2 \rangle}{l} \langle E \rangle^{0,5}, \\ -\langle (E + \frac{p'}{\rho})v' \rangle &= c_0 \varepsilon \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial y}, \\ v \langle \frac{\partial u'}{\partial y} \frac{\partial u'}{\partial y} \rangle &= c \frac{\varepsilon \langle E \rangle}{l^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Коэффициент турбулентной вязкости  $\varepsilon$  будем рассчитывать по формуле Прандтля

$$\varepsilon = l^2 \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial y} \approx k^2 b^2 \frac{u_{1m}}{b} = k^2 b u_{1m}, \text{ где } l - \text{ ха-}$$

рактерный масштаб, равный  $kb$ ,  $b$  – условная ширина следа,  $k$  – эмпирическая постоянная. Будем искать автомодельное решение системы уравнений (1) для чего введем новые безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} \frac{\langle u_1 \rangle}{u_{1m}} &= F'(\varphi), \quad \frac{\langle t - t_\infty \rangle}{t_m - t_\infty} = \theta(\varphi), \\ \frac{\langle E \rangle}{E_m} &= K(\varphi), \quad \frac{\langle t'^2 \rangle}{\langle t'^2 \rangle_0} = \theta_*(\varphi), \\ u_{1m} &= Ax^\alpha, \quad t_m - t_\infty = \Gamma x^\delta, \quad E_m = E_0 x^\gamma, \\ \langle t'^2 \rangle_0 &= N^2 x^{2\xi}, \quad \varphi = Bux^\beta. \end{aligned} \quad (3)$$

Величины  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi$  – определяются путем подстановки формул (3) в уравнения (1) и интегральные уравнения сохранения импульса и тепла и требования независимости полученных выражений от координаты  $x$ :  $\alpha = \beta = \delta = \xi = -0,5$ ,  $\gamma = -1$ . Постоянные  $A, \Gamma, E_0$  и  $N$  находятся из начальных условий задачи. После перехода в уравнениях (1) к автомодельным переменным (3) они преобразуются в обыкновенные дифференциальные уравнения, имеющие вид:

$$\begin{aligned} F''' + 2(\varphi F')' &= 0, \\ \theta'' + 2(\varphi \theta)' &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} K'' + \varphi K' + (2 - c_1)K + 57, \quad 6\varphi^2 \exp(-2\varphi^2) &= 0, \\ \theta_*'' + \varphi \theta_*' + (2 - c_2)\theta_* + 57, \quad 6\varphi^2 \exp(-2/c_0 \varphi^2). \end{aligned}$$

При выводе уравнений (4) были приняты значения величин  $\frac{u_\infty}{AB^2 k^2 c_0} = 2$  вследствие произвольности в выборе постоянной  $B$ , а также  $\frac{A^2}{c_0 E_0} \approx \frac{2\Gamma^2}{c_0^2 N^2} \approx 14.4$  – из начальных условий задачи,  $c_1, c_2$  – эмпирические постоянные.

**Расчет распределения скорости и температуры.** Расчет распределения скорости и температуры производился по первому и второму уравнениям системы (4). Граничные условия для первого уравнения запишутся:

$$\begin{aligned} F'(\varphi) = F'(\varphi_t) = 1, \quad F(\varphi) = F(\varphi_t) = F''(\varphi) = \\ = F''(\varphi_t) = 0 \text{ при } \varphi = \varphi_t = 0, \quad F'(\varphi) = 0 \text{ при } \\ \varphi \rightarrow \infty, \quad F'(\varphi_t) = c_3 \text{ при } \varphi_t = d_1, \quad F'(\varphi_0) = c_4 \end{aligned}$$

$$\text{при } \varphi_0 = d_2, \quad F'(\varphi_0) = 0 \text{ при } \varphi_0 \rightarrow \infty.$$

Здесь  $d_1$  – глубина проникновения турбулентной жидкости в область потенциального течения, а  $d_2$  – глубина проникновения не турбулентной жидкости в пограничный слой следа. Для второго уравнения они имеют соответственно вид:  $\theta(\varphi) = \theta(\varphi_t) = 1$  при  $\varphi = \varphi_t = 0$ ,  $\theta(\varphi) = 0$  при  $\varphi \rightarrow \infty$ ,  $\theta(\varphi_t) = \theta_1$  при  $\varphi_t = d_1$ .

При расчетах профилей скорости граничное условие при  $\varphi_0 = d_2$  заменялось приближенно условием  $F'(\varphi_0) = 1$  при  $\varphi_0 = 0$ , а профиля температуры при  $\varphi_t = d_1$  условием  $\theta(\varphi_t) = 0$  при  $\varphi_t \rightarrow \infty$ . При этом, естественно, полученные значения скорости для не турбулентной жидкости в области  $\varphi_0 < d_2$  и температуры для турбулентной жидкости в области  $\varphi_t > d_1$  не имеют физического смысла. Интегрируя первые два уравнения системы (4) с указанными граничными условиями нетрудно получить формулы для расчета распределения осредненных (по каждой из перемежающихся сред) значений скорости и температуры:

$$\frac{\langle u_1 \rangle_i}{u_{1m}} = F'(\varphi) = \exp(-\varphi^2) \quad (i = t, 0), \quad (5)$$

$$\frac{\langle t - t_{\infty} \rangle_i}{t_m - t_{\infty}} = \theta(\varphi) = \exp\left(-\frac{\varphi^2}{c_0}\right). \quad (6)$$

Полные (безусловные) значения средней скорости и температуры находятся из известного соотношения теории вероятностей между полными и условными средними величинами и коэффициентом перемежаемости  $\gamma$ :

$$\langle u \rangle = \gamma \langle u \rangle_t + (1 - \gamma) \langle u \rangle_0, \quad (7)$$

$$\langle \theta \rangle = \gamma \langle \theta \rangle_t. \quad (8)$$

В уравнении (8) отсутствует слагаемое  $(1 - \gamma) \langle \theta \rangle_0$ , поскольку величина  $\langle \theta \rangle_0$ , как показано в работе [9], равна нулю.

Для определения коэффициента перемежаемости воспользуемся простым приближенным методом, предложенным в работе [10]. Согласно этому методу коэффициент перемежаемости можно вычислить по формуле

$$\gamma = \frac{Ai(\chi)}{Ai(\chi)_{\max}}, \quad (9)$$

где  $Ai(\chi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + t\chi\right) dt$  – функция

Эйри с аргументом  $\chi = b_1^{1/3} (z - a_1/b_1)$ ,  $b_1^{-2/3} a_1 = -2.338$ ,  $Ai(\chi)_{\max}$  – максимальное значение функции Эйри, имеющее место при  $\chi = -1$ ,  $Ai(\chi)_{\max} = 0.536$ .

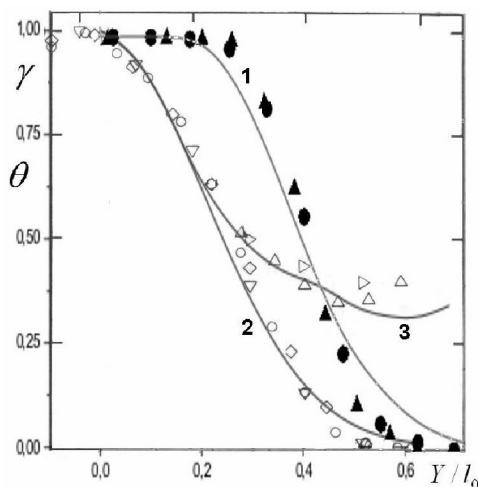


Рис. 1. Распределение коэффициента перемежаемости  $\gamma$  (кривая 1), полной  $\theta$  (кривая 2) и условной по турбулентной жидкости  $\theta_t$  (кривая 3) средней температуры в поперечных сечениях турбулентного следа за цилиндром. Сплошные линии – расчетные, точки – опытные данные [2,3].

$$l_0 = \sqrt{D(x - x_0)}, x/D = 400, x_0/D = -40, D - \text{диаметр цилиндра}$$

В точке максимального значения функции Эйри имеем  $-1 = b_1^{1/3} z - 2.338$  или  $b_1^{1/3} z = 1.338$ .

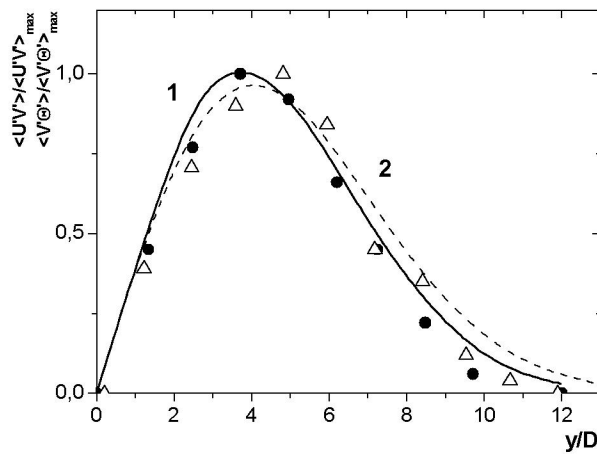
Представляя в этом выражении  $z = \langle z \rangle + z'$  и произведя операцию осреднения получим:

$$b_1^{1/3} \langle z \rangle = 1.338. \quad (10)$$

Подставляя в (10) значение  $\langle z \rangle = z_0$  на глубине проникновения не турбулентной жидкости в пограничный слой определим параметр  $b_1$ . Как показал анализ, значения этих величин для турбулентного следа соответственно равны  $z_0 = 0.762$ ,  $b_1^{1/3} = 1.7559$ . Зная эти величины нетрудно определить зависимость параметра  $\chi$  от  $\langle z \rangle$  и построить функцию  $\gamma(z)$  в физических координатах (рис. 1).

На рис. 1 и 2 расчетные профили коэффициента перемежаемости, средней температуры и скорости (полные и условные по турбулентной и не турбулентной жидкости) сопоставлены с экспериментальными данными, приведенными в работах [2, 3], и получено хорошее их согласие. При этом при расчетах профиля температуры использовались значения эмпирических постоянных  $c_0 = 1.11$  и  $B = 1, 4066$ , а при расчетах скорости  $B = 1.3769$  (для турбулентной жидкости) и  $B = 2.0997$  (для не турбулентной жидкости). Расчет распределения касательного напряжения трения и теплового потока был выполнен путем подстановки полученных выражений для профилей скорости и температуры в первые два уравнения системы (1) и последующего их интегрирования (рис. 3):

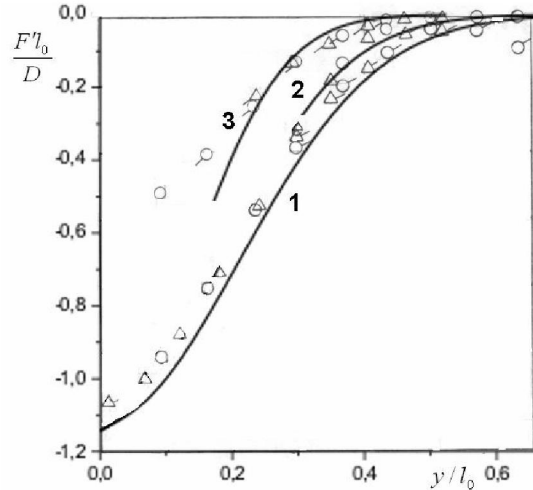
**Рис. 2.** Распределение полной  $F'$  (кривая 1) и условной по турбулентной  $F'_t$  (кривая 2) и не турбулентной  $F'_0$  (кривая 3) жидкости средней скорости в поперечных сечениях турбулентного следа за цилиндром. Сплошные линии - расчетные, точки - опытные данные [3].  $\Delta, \circ$  - полные средние скорости,  $\triangle, \circ$  - средние скорости по турбулентной жидкости,  $\circ, \triangle$  - средние скорости по не турбулентной жидкости



$$\frac{\langle u'v' \rangle}{\langle u'v' \rangle_{\max}} = \frac{\varphi \exp(-\varphi^2)}{0.4275} \frac{\langle v't' \rangle}{\langle v't' \rangle_{\max}} = \frac{\varphi \exp(-0.9\varphi^2)}{0.4522}. \quad (11)$$

**Расчет интенсивностей пульсаций скорости и температуры.** Расчет кинетической энергии пульсаций  $\langle E \rangle = 0.5 \langle (u'^2 + v'^2 + w'^2) \rangle$  и интенсивности пульсаций температуры  $\langle t'^2 \rangle$  производился по третьему и четвертому уравнениям (4). Граничные условия для энергии турбулентности принимались в виде  $K = 1, K' = 0$  при  $\varphi = 0, K = 0$  при  $\varphi \rightarrow \infty$ , аналогично для интенсивности пульсаций температуры  $\theta_* = 1, \theta'_* = 0$  при  $\varphi = 0, \theta'_* = 0$  при  $\varphi \rightarrow \infty$ . Результаты численного интегрирования уравнения для пульсационной энергии представлены на рис. 4.

При расчетах принимались значения констант  $c_1 = 5$  и  $B = 1$ . На этом же рисунке нанесены расчетные кривые интенсивностей пульсаций всех



**Рис. 3.** Профили касательного напряжения

трения  $\frac{\langle u'v' \rangle}{\langle u'v' \rangle_{\max}}$  (кривая 1)

и теплового потока  $\frac{\langle v'\theta' \rangle}{\langle v'\theta' \rangle_{\max}}$  (кривая 2)

в поперечных сечениях турбулентного следа за цилиндром. Сплошные линии - расчетные.

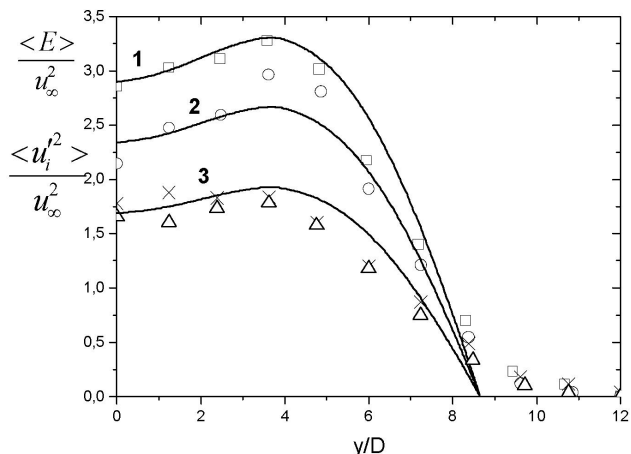
$\bullet - \frac{\langle u'v' \rangle}{\langle u'v' \rangle_{\max}}, \triangle - \frac{\langle v'\theta' \rangle}{\langle v'\theta' \rangle_{\max}}$  - опытные данные [2]

трех компонент вектора скорости и соответствующие им экспериментальные данные, приведенные в работе [2]. Для вычисления интенсивностей пульсаций скорости, как и в работе [11], были использованы уравнения для реинльдсовых напряжений [5] пренебрегая в них, как и обычно, членами, связанными с влиянием молекулярной вязкости, с конвективным и диффузионным переносом. Опуская детали запишем лишь окончательные результаты их решения [11]:

$$\langle u'^2 \rangle = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{2}{m}\right) \langle E \rangle, \langle v'^2 \rangle = \langle w'^2 \rangle = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \langle E \rangle, \langle u'w' \rangle = \langle v'w' \rangle = 0, \quad (12)$$

где  $m$  - эмпирическая постоянная, принимаемая равной 8.79.

При численных расчетах интенсивности пульсаций температуры в центральной зоне следа использовалось четвертое уравнение системы (4). При этом значение постоянной  $c_2$  принималось равным 7,75, а  $B$  - равным 1,4545. В пери-



**Рис. 5.** Профили полного среднего значения интенсивности пульсаций температуры  $\theta_*$  в поперечных сечениях турбулентного следа за цилиндром. Сплошные линии – расчетные. Точки – опытные данные [2]

ферийной зоне течения это уравнение существенно упрощается поскольку, как указывалось выше, в этом случае можно пренебречь величинами, связанными с конвективным и диффузионным переносом. Уравнение при этом приобретает простой вид:

$$\theta_* = L\phi^2 \exp(-1.8\phi^2), \quad (13)$$

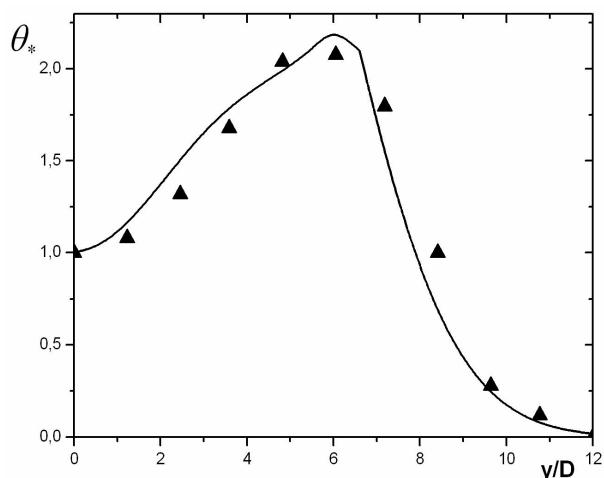
где постоянная L принимает значение 19.44, а  $B=1.4545$ .

На рис. 5 результаты расчетов среднеквадратичных пульсаций температуры в турбулентном следе сопоставлены с экспериментальными данными, представленными в работе [2].

В заключение отметим, что развитая в статье математическая модель аэродинамики и теплообмена в плоском турбулентном следе за цилиндром, учитывающая явление перемежаемости турбулентной и не турбулентной жидкости, дает возможность выполнить детальные и достаточно точные расчеты полных и условных (по

**Рис. 4.** Профили полных средних значений кинетической энергии пульсаций  $\langle E \rangle / u_\infty^2$  (кривая 1), интенсивностей пульсаций  $\langle u'^2 \rangle / u_\infty^2$  (кривая 2) и  $\langle v'^2 \rangle / u_\infty^2 = \langle w'^2 \rangle / u_\infty^2$  (кривая 3) в поперечных сечениях турбулентного следа за цилиндром. Сплошные линии – расчетные. Точки – опытные данные [2].

□ –  $\langle E \rangle / u_\infty^2$ , ○ –  $\langle u'^2 \rangle / u_\infty^2$ ,  
 × –  $\langle v'^2 \rangle / u_\infty^2$ , △ –  $\langle w'^2 \rangle / u_\infty^2$



каждой из перемежающихся сред) средних статистических характеристик динамического и температурного поля рассматриваемого течения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Таунсенд А.А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М.: Издат. иностр. лит., 1959. С. 399.
2. Fabris G. Conditional sampling study of the turbulent wake of a cylinder // J. Fluid Mech. 1979. V. 94, p. 4. P. 673-709.
3. Fabris G. Higher-order statistics of turbulent fluctuations in the plane wake // The Physics of Fluids. 1983. V. 26, N 6. P.1437-1445.
4. Хитце И.О. Турбулентность, ее механизм и теория. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1963. С. 680.
5. Мотин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1965. С. 639.
6. Коловандин Б.К. К расчету основных характеристик теплообмена в турбулентных течениях со сдвигом. Тепло и массоперенос. Том 1. М.: Энергия, 1968. С. 154-166.
7. Rotta I.S. Statistische theorie inhomogener turbulenz // Z. fur Physic. 1951. Bd., 129, N. 5. S. 547-572.
8. Нуженов Ю.В., Устименко Б.П. Диффузионное горение турбулентных потоков. Алма-Ата: Наука, 1993. С. 300.
9. Устименко Б.П. Условные и полные средние харак-

теристики температурного поля турбулентной осесимметричной струи // Доклады НАН РК. 2003. 5. С. 28-37.

10. Устименко Б.П. Доклады НАН РК. 2007. (в печати).

11. Устименко Б.П. Пульсационные характеристики осесимметричной турбулентной струи // Доклады НАН РК. 2003. 1. С. 122-128.

### **Резюме**

Шеңбер цилиндрдің ар жағындағы турбуленттік ізіндегі алма-кезек араласуы эффект бойынша динамикалық және

температуралық өрістер сипаттамаларының шарты және толық орташа статисттік есептеулері орындалған.

### **Summary**

Calculations of conditional and complete averages of statistical characteristics of dynamic and temperature field in the turbulent wake of the cylinder are fulfilled. Intermittency effect was taken into account.

*Поступила 30.03.07г.*