was performed by 325 nm - HeCd laser. As- prepared samples after draining reveal high intensity signals of PL centered at blue (~ 415 nm) or at red (~ 650 nm) regions that depended upon conditions of etching. Both bands can be observed simultaneously in the same point of sample. Study of PS surface with UV and Red emission by atomic force microscopy (AFM) remarkably demonstrate strong dependence of PL band energy from morphology and sizes of nanocristallites. In particular, the surface of UV layer has structure of strip-type resonators with gap of < 1 nm. The Raman spectra (around 519 cm^{-1}) that are associated with nanocristalline silicon for UV and red layers have shown that their intensity in 5-7 times large of signal from a bulk substrate. This enhancement of intensity was earlier related to inelastic light - scattering on quantum wires of porous silicon.

УДК537.311.322

Физико-технический институт
МОН РК, г. Алматы

Поступила 2.06.07г.

А. М. САРСЕНБИ

БАЗИСНОСТЬ РИССА РАВНОМЕРНО ОГРАНИЧЕННЫХ СИСТЕМ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим оператор L, порожденный дифференциальным выражением

$$\ell u = p_0(x)\,u'' + p_1(x)\,u' + p_2(x)\,u \qquad (1)$$

и некоторыми краевыми или нелокальными условиями на произвольном конечном интервале $G = (a,b)$. Для наших рассуждений конкретный вид краевых условий не играет особой роли. Поэтому выражение (1) мы будем называть формально несамосопряженным дифференциальным оператором, коэффициенты которого удовлетворяют следующим условиям С:

– для некоторой внутренней точки $x_0 \in G$ вещественнозначный коэффициент $p_0(x) \geq \alpha > 0$ абсолютно непрерывен вместе со своей первой производной на замкнутых интервалах $[a, x_0]$ и $[x_0, b]$;

– для той же точки $x_0 \in G$ комплекснозначный коэффициент $p_1(x)$ абсолютно непрерывен на каждом отрезке $[a, x_0]$ и $[x_0, b]$;

– комплекснозначный коэффициент $p_2(x) \in \in L_1(a,b)$.

Поскольку нас не интересует явный вид краевых условий, то собственные и присоединенные функции оператора L мы будем понимать в обобщенном смысле В. А. Ильина [1], а именно, системой обобщенных корневых функций (ОКФ) оператора L назовем произвольную систему комплекснозначных функций $\{u_k(x)\}$, каждая из которых абсолютно непрерывна вместе со своей первой производной на замкнутых интервалах $[c, x_0]$ и $[x_0, d]$ ($a < c < x_0 < d < b$), для некоторого λ_k почти всюду в (a, x_0) и (x_0, b) удовлетворяет уравнению

$$Lu_k + \lambda_k u_k = \theta_k u_{k-1} \qquad (2)$$

и в точке разрыва x_0 удовлетворяет условиям сопряжения

$$u_k(x_0 - 0) = u_k(x_0 + 0), \qquad (3)$$

$$p_0(x_0 - 0)\cdot u_k'(x_0 - 0) =$$
$$= p_0(x_0 + 0)\cdot u_k'(x_0 + 0) + \beta\, u_k(x_0 + 0), \qquad (4)$$

где β – некоторая постоянная, $\theta_k = 0$, либо $\theta_k = 1$ (в этом случае $\lambda_k = \lambda_{k-1}$), $\theta_1 = 0$.

При $\theta_k = 0$ функцию $u_k(x)$ называем обобщенной собственной функцией, а при $\theta_k = 1$ – обобщенной присоединенной функцией.

Оператор, формально сопряженный к оператору L, обозначим следующим образом

$$L^* \upsilon = (p_0 \upsilon)'' - (\bar{p}_1 \upsilon)' + \bar{p}_2 \upsilon .$$

Предположим, что система $\{\upsilon_k(x)\}$, биортогонально сопряженная к ОКФ $\{u_k(x)\}$, состоит из ОКФ оператора L^*.

Будем считать, что система ОКФ $\{u_k(x)\}$ пронумерованы так, что вслед за каждой обобщенной собственной функцией стоят все входящие вместе с ней в одну цепочку обобщенные присоединенные функции. Тогда ОКФ $\upsilon_k(x)$ сопряженного оператора определяются как абсолютно непрерывные функции вместе со своей первой производной в интервалах $[c, x_0]$ и $[x_0, d]$, ($a < c < x_0 < d < b$), удовлетворяющие условиям, аналогичным условиям (3) и (4), возможно с другой константой β, и удовлетворяющие почти всюду в (a, x_0) и (x_0, b) уравнениям

$$L^*\upsilon_k + \overline{\lambda}_k \upsilon_k = \theta_{k+1}\upsilon_{k+1},$$

где числа λ_k и θ_k те же, что и в уравнении (2).

В работе [2] В. Д. Будаевым установлен следующий результат.

Теорема (В. Д. Будаев). Пусть $\{u_k(x)\}$ – произвольная полная в $L_2(G)$ и минимальная система ОКФ оператора L, коэффициенты которого удовлетворяют условиям С. Пусть выполняются следующие два условия:

– система $\{\upsilon_k(x)\}$, биортогонально сопряженная к системе $\{u_k(x)\}$, состоит из ОКФ сопряженного оператора L^*;

– последовательность $\{\mu_k\}$ не имеет конечных точек сгущения и существует константа M_1 такая, что для любого номера k = 1,2,3,...

$$|\operatorname{Im}\mu_k| \le M_1, \qquad (5)$$

где $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$ – тот корень из комплексного числа λ_k, для которого $\operatorname{Re}\mu_k \ge 0$.

Тогда для безусловной базисности в $L_2(G)$ каждой из систем $\{u_k(x)\}$ и $\{\upsilon_k(x)\}$ необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств для всех номеров k

$$\sum_{t \le |\mu_k| \le t+1} 1 \le M_2, \qquad (6)$$

$$\| u_k(x)\|_{L_2(G)} \cdot \| \upsilon_k(x)\|_{L_2(G)} \le M_3. \qquad (7)$$

Условие (7) обычно называют условием базисности В. А. Ильина. Необходимость условия (7) для произвольных базисов, вообще говоря, не связанных с дифференциальным оператором, известна давно [3. С. 372].

Пусть y – произвольная точка интервала $[x_0, b)$. Введем новую переменную

$$t(x) = \int_y^x p_0^{-1/2}(s)ds$$

и на интервале $[t(x_0), t(b)]$ рассмотрим функции $\omega_k(t)$, определенные равенством

$$u_k(x) = \gamma_1(x) \cdot \omega_k(t), \ k = 1,2,3,...,$$

где

$$\gamma_1(x) = \left(\frac{p_0(x)}{p_0(y)}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_y^x \frac{p_1(s)}{p_0(s)}ds\right).$$

Легко проверить, что

$$Lu_k = \gamma_1(x) \cdot [\omega_k''(t) + q_1(t)\omega_k(t)]$$

и, следовательно, функции $\omega_k(t)$ являются ОКФ оператора

$$L_1\omega = \omega'' + q_1\omega,$$

заданного на интервале $(t(x_0), t(b))$ с потенциалом $q_1(t) \in L_1$.

Таким образом, для функций $\omega_k(t)$ на интервале $(t(x_0), t(b))$ справедливы оценки, полученные В.В. Тихомировым в работе [4].

Аналогично можно убедиться в справедливости результатов работы [4] в интервале $(t(a), t(x_0))$.

Так как $u_k(x) = \gamma_1(x) \cdot \omega_k(t)$, то пользуясь видом функции $\gamma_1(x)$ и условиями сопряжения (3), убеждаемся в справедливости результатов работы [4] для функции $u_k(x)$ на интервалах (x_0, b) и (a, x_0).

Итак, мы убедились, что для ОКФ оператора L вида (1) справедливы следующие оценки [4], которые при выполнении условия (5) имеют вид

$$c_1 \| u_k(x)\|_{L_q(G)} \le \| u_k(x)\|_{L_s(G)} \le c_2 \| u_k(x)\|_{L_q(G)}, \qquad (8)$$

где $1 \le q \le s \le +\infty$.

Оценки (8) играют важную роль при доказательстве результатов настоящей статьи.

Теорема. Пусть $\{u_k(x)\}$ – произвольная полная в $L_2(G)$ и минимальная система ОКФ оператора L, коэффициенты которого удовлетворяют условиям С. Пусть также выполняются следующие два условия:

– система $\{\upsilon_k(x)\}$, биортогонально сопряженная к системе $\{u_k(x)\}$, состоит из ОКФ сопряженного оператора L^*;

– последовательность $\{\mu_k\}$ не имеет конечных точек сгущения и существует константа M_1 такая, что для любого номера k = 1,2,3,...

$$|\operatorname{Im}\mu_k| \le M_4,$$

где $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$ – тот корень из комплексного числа λ_k, для которого $\operatorname{Re}\mu_k \ge 0$.

Тогда для базисности Рисса каждой из систем $\{u_k(x)\}$ и $\{\upsilon_k(x)\}$ необходимо и достаточно выполнение нижеследующих неравенств для всех номеров k:

$$\sum_{t\le|\mu_k|\le t+1} 1 \le M_5, \ \forall t \ge 0, \tag{9}$$

$$\|u_k(x)\|_{L_\infty(G)} \le M_6, \qquad \|v_k(x)\|_{L_\infty(G)} \le M_7, \tag{10}$$

для всех номеров k.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы и каждая из систем $\{u_k(x)\}$ и $\{\upsilon_k(x)\}$ является базисом Рисса. Тогда элементы этих систем почти нормированы в $L_2(G)$, т.е. существуют такие положительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, что имеют место оценки

$$\alpha_1 \le \|u_k(x)\|_{L_2(G)} \le \beta_1, \quad \alpha_2 \le \|v_k(x)\|_{L_2(G)} \le \beta_2.$$

В неравенствах (8) положим $q = 2, \ s = \infty$. Тогда из первой половины этих неравенств будем иметь

$$\|u_k(x)\|_{L_\infty(G)} \le C_2\|u_k(x)\|_{L_2(G)} \le C_2\beta_1.$$

Полагая $M_3 = C_2\beta_1$, получаем первое неравенство (10).

Система $\{\upsilon_k(x)\}$ состоит из собственных и присоединенных функций сопряженного оператора L^*, поэтому для функций $\upsilon_k(x)$ также справедливы оценки (8). Так что, вывод второй оценки (10) совершенно аналогичен выводу первого неравенства. Необходимость условия (9) следует из теоремы В. Д. Будаева.

Докажем достаточность условий (10) и (9). Из левой половины неравенств (8) при $q = 2, \ s = \infty$, имеем

$$C_1\|u_k(x)\|_{L_2(G)} \le \|u_k(x)\|_{L_\infty(G)} \le M_3.$$

Аналогичная оценка справедлива для элементов системы $\{\upsilon_k(x)\}$. L_2 - нормы элементов обеих систем ограничены сверху. Следовательно,

$$\|u_k(x)\|_{L_2(G)} \cdot \|v_k(x)\|_{L_2(G)} \le const.$$

Выполнены все условия теоремы В.Д. Будаева. Это означает, что системы $\{u_k(x)\}$, $\{\upsilon_k(x)\}$ образуют безусловный базис пространства $L_2(G)$.

С другой стороны, имеющиеся факты обеспечивают почти нормированность в $L_2(G)$ элементов каждой из систем $\{u_k(x)\}$ и $\{\upsilon_k(x)\}$. Это следует из биортонормированности этих систем и неравенства Коши – Буняковского

$$1 = |(u_k(x), v_k(x))| \le \|u_k(x)\|_{L_2(G)} \cdot \|v_k(x)\|_{L_2(G)}.$$

Из последнего соотношения, ввиду (7), легко выводится ограниченность снизу L_2-норм элементов рассматриваемых систем.

Таким образом, мы имеем безусловные и почти нормированные в $L_2(G)$ базисы, которые, по теореме Лорча [3], являются базисами Рисса. Теорема доказана.

Аналогичные результаты были установлены нами в работе [5] для случая операторов второго порядка другого вида.

Автор выражает искреннюю признательность всем участникам научного семинара под руководством д-ра физ.-мат. наук М. А. Садыбекова за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин В.А.* О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка // Доклады АН СССР. 1983. Т. 273, № 5. С. 1048-1053.

2. *Будаев В.Д.* О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций оператора второго порядка с разрывными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 6. С. 941-952.

3. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М., Наука, 1965. 448 с.

4. *Тихомиров В.В.* Точные оценки регулярных решений одномерного уравнения Шредингера со спектральным параметром // Доклады АН СССР. 1983. Т. 273, № 4. С. 807-810.

5. *Сарсенби А.М.* Критерий базисности Рисса корневых функций дифференциального оператора второго порядка // Доклады НАН РК. 2006. № 1. С. 44-48.

Резюме

Түпкілікті функциялардың бірқалыпты шенелген болуы олардың Рисс базисі болуы үшін қажетті және жеткілікті екендігі көрсетілген.

Summary

We have proved. That evenly limitenes of root functions is a criterion of their Riss basisnes, in this work.

УДК 517.927.25

ЮКГУ *Поступила 2.05.07г.*

Г. З. ЗАЙНЕЛОВА

ВЛИЯНИЕ УРАНОВОГО ПРОИЗВОДСТВА НА ГЕМАТОЛОГИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ РАБОЧИХ

Обследовано 343 рабочих, занятых на урановом производстве, в основных циклах получения ядерного топлива. В первой группе - 78 рабочих (22,74%) в возрасте от 18-ти до 30-ти лет, средний стаж работы - 4,18+0,8 лет. Во второй группе - 159 рабочих (46,35%) в возрасте от 31-го до 44-х лет со стажем работы 10,74±0,45 лет. В третьей группе - 106 рабочих (30,90%) в возрасте от 45-ти до 60-ти лет со стажем работы 16,2±3,2 лет.

Гематологические показатели в разновозрастных группах у рабочих завода ядерного топлива колеблется в основном в пределах физиологических границ. В первой группе уровень гемоглобина снижен на 9,28% по сравнению со средними значениями. Скорость оседания эритроцитов уменьшена на 30,38%. Количество тромбоцитов также уменьшено на 14,33%, количество палочкоядерных нейтрофилов - на 13,84%. Количество лейкоцитов увеличено на 9,67%, базофильных гранулоцитов - в 3,27 раза, сегментоядерных нейтрофилов - на 4,69%, лимфоцитов - на 0,55%, моноцитов - на 4,93%. Количество эритроцитов и эозинофильных гранулоцитов практически не отличается от средних значений.

Во второй группе уровень гемоглобина снижен на 7,5%, скорость оседания эритроцитов - на 34,18%. Количество тромбоцитов снижено на 8,89%, эритроцитов - 8,2%, палочкоядерных нейтрофилов - на 8,34%, эозинофильных гранулоцитов - на3,58%, лимфоцитов - на 5,59%. Количество лейкоцитов увеличено на 11,29%, базофильных гранулоцитов - в 3,27 раза, сегментоядерных нейтрофилов - на 6,0%, моноцитов, - на 4,83% (табл. 1).

В третьей группе уровень гемоглобина уменьшается на 10,3%, скорость оседания эритроцитов - на 15,29%, количество тромбоцитов – на 6,44%, эритроцитов - на 14,46%, палочкоядерных нейтрофилов - на 22,23%, эозинофильных гранулоцитов - на 14,29%, лимфоцитов - на 6,15%. Количество лейкоцитов увеличено на 8%, базофильных гранулоцитов - в 2,95 раза, сегментоядерных нейтрофилов - на 5,8%, моноцитов - на 6,45% (табл. 1).

В разновозрастных группах гематологические показатели изменяются следующим образом: уровень гемоглобина снижается с увеличением стажа работы, аналогичная картина отмечена и для скорости оседания эритроцитов, эритроцитов, лейкоцитов, палочкоядерных нейтрофилов и только количество базофильных гранулоцитов увеличено в 3,16 раза по сравнению со средними значениями.

Анализ гистограмм гемоглобина показал увеличение показателя во второй возрастной группе на 1,88% и снижение в третьей группе на 1,13% (рис. 1).

Гистограмма тромбоцитов отличается увеличением значений в старших возрастных группах: на 6,33% во второй группе и на 9,2% в третьей группе (рис. 2). Аналогичная картина отмечена и для распределения сегментоядерных нейтрофилов (рис. 3). Количество лимфоцитов отличается снижением показателя на 6,12% во второй груп-