

## Резюме

Негізгі жағдайдағы реттелген жүйелердің абсолютті орнықтылық аймағын анықтау критерийі құрастырылған. Белгілі критерийлермен салыстырғанда ұсынылып отырған критерий абсолютті орнықтылықтың кеңейтілген аймағын бөліп алуға мүмкіндік береді.

## Summary

The criterion of defining the domain of absolute stability of regular systems in basic case is been developed. In compare with known criterions proposed criterion allows to obtain a wider domain of absolute stability.

УДК 517.938

КазНУ им. Аль-Фараби,  
г. Алматы

Поступила 22.06.07г.

*Е. Б. ЕСИМХАН, И. Т. ПАК*

## АНАЛИЗ ПАЛЕОКЛИМАТИЧЕСКИХ ДАННЫХ МЕТОДАМИ КРОСС-РЕКУРРЕНТНЫХ ГРАФИКОВ

Климатическая система Северной Атлантики оказывает непосредственное влияние на обширную область северного полушария от восточного побережья США до Сибири, от Арктики до субтропической Атлантики [1]. Ее исследование представляет особый интерес в рамках проблемы изучения климата в связи с наблюдаемыми аномальными климатическими изменениями. В частности, существует гипотеза о взаимосвязанности процессов переноса тепла и влаги на всем Северо-Атлантическом регионе, управляемых так называемой северо-атлантической осцилляцией (NAO) [2]. Целью настоящей статьи является тестирование связи между отдельными областями Северной Атлантики по двум временным рядам, отслеживающим соответствующие климатические вариации.

Первый временной ряд представляет собой среднеиюльскую температуру Фенноскандии\*, реконструированную по ширине колец Шотландской сосны, произрастающей в данном регионе [3]. Известно, что радиальный годовой прирост колец Шотландской сосны хорошо коррелирует с летней температурой региона, поэтому эта связь и используется для реконструкции температуры в интервале 5510 г. до н.э. – 1993 г. н.э. [3].

Второй временной ряд представляет собой относительное количество стабильного изотопа кислорода  $^{18}\text{O}/^{16}\text{O}$  ( $\delta^{18}\text{O}$ ) во льдах Гренландии.

Величина  $\delta^{18}\text{O}$  является косвенной температурной характеристикой, поскольку количество  $^{18}\text{O}$  во льду линейно зависит от температурных условий в момент выпадения осадков [4]. Благодаря сезонным колебаниям выпадения осадков, ледовые отложения имеют слоистую структуру, причем верхние слои могут быть датированы с точностью до года. В работе использовался оригинальный ряд среднегодовых значений  $\delta^{18}\text{O}$  на интервале 818 г. н.э. – 1987 г. н.э. [5], а также реконструкции с разрешением 5 и 10 лет на интервале 5510 г. до н.э. – 1990 г. н.э. [6].

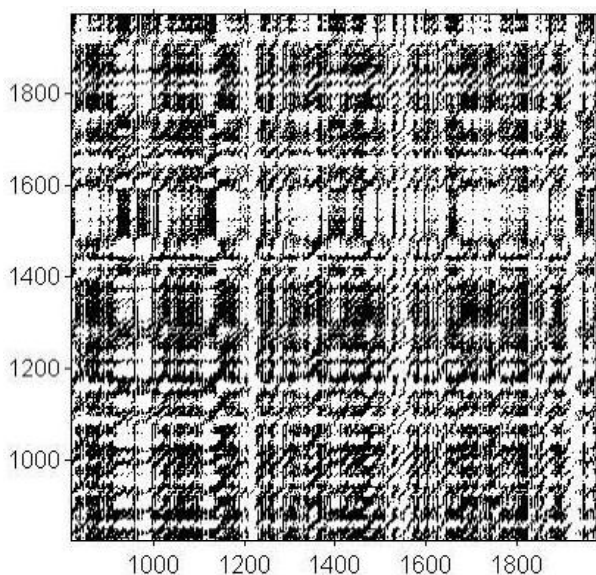
Для диагностики существования взаимной связи между описанными временными рядами на масштабе 1, 5 и 10 лет использовались так называемые графики кросс-рекуррентности [7]. Под рекуррентностью здесь понимается повторяемость состояния процесса по прошествии некоторого времени. Упомянутый метод позволяет исследовать поведение двух динамических систем, эволюционирующих в одном фазовом пространстве, с помощью двумерного представления их рекуррентных траекторий. Он применим к коротким нестационарным зашумленным данным.

Формально графиком кросс-рекуррентности (ГКР) называется бинарная матрица

\*Фенноскандия – природная страна в Европе, включающая Скандинавский полуостров, Финляндию, Кольский полуостров и Карелию.

$$\mathbf{CR}_{ij}^{m,\varepsilon_i} = \Theta\left(\varepsilon_i - \|\mathbf{X}_i - \mathbf{Y}_j\|\right), \quad \mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_j \in R^m, \\ i \in \overline{N_X}, j \in \overline{N_Y}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_j$  – вектора состояния двух динамических систем  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ . Если состояние системы  $\mathbf{Y}$  в момент времени  $j$  оказалось близко состоянию системы  $\mathbf{X}$  в другой момент времени  $i$ , значение  $\mathbf{CR}_{ij}^{m,\varepsilon_i} = 1$ . В этом случае на графике кросс-рекуррентности в позиции  $(i, j)$  будет стоять черная точка (рис. 1). На ГКР визуально выделяют крупномасштабные и мелкомасштабные паттерны, характеризующие взаимное поведение исследуемых систем. Так, диагональные линии соответствуют интервалам времени, когда динамика развития траекторий обеих систем совпадает с некоторой заданной точностью. Их количество и длина отражает степень схожести исследуемых процессов. Так, с увеличением силы связи между двумя детерминированными процессами число и длина диагональных линий на ГКР возрастает. График кросс-рекуррентности, построенный для двух случайных временных рядов, состоит в основном из коротких диагоналей и изолированных точек. Для количественного анализа наблюдаемых структур используют специально введенные меры [7]. Нами использовались 3 меры.



По оси  $x$  отложено время (в годах) для  $\delta^{18}O$ ,  
по оси  $y$  – для температуры

**Рис. 1.** График кросс-рекуррентности для среднегодовых значений  $\delta^{18}O$  во льдах Гренландии и температуры Фенноскандии

Пусть  $P_k^\varepsilon(l) = \{l_i\}$ ,  $i = \overline{1, N_l}$  – частотное распределение длин диагональных линий для  $k$ -ой диагонали ГКР.  $k = 0$  соответствует главной диагонали, составляющей угол  $45^\circ$  с положительным направлением горизонтальной временной оси. Значениям  $k > 0$  соответствуют диагонали, лежащие выше главной диагонали,  $k < 0$  – ниже главной диагонали. Коэффициент

$$RR(k) = \frac{1}{N - |k|} \sum_{l=1}^{N-|k|} l P_k^\varepsilon(l)$$

есть отношение числа рекуррентных точек к общему числу точек на  $k$ -ой диагонали графика. Таким образом,  $RR(k)$  представляет собой вероятность возникновения близких состояний рассматриваемых процессов на лаге  $k$ . Степень детерминизма

$$DET(k) = \frac{\sum_{l=l_{\min}}^{N-|k|} l P_k^\varepsilon(l)}{\sum_{l=1}^{N-|k|} l P_k^\varepsilon(l)}$$

есть отношение числа рекуррентных точек, образующих длинные диагональные линии ( $\geq l_{\min}$ ), к общему числу рекуррентных точек на диагонали. Меры  $RR$  и  $DET$  изменяются в диапазоне  $[0, 1]$ . Средняя длина

$$L(k) = \frac{\sum_{l=l_{\min}}^{N-|k|} l P_k^\varepsilon(l)}{\sum_{l=l_{\min}}^{N-|k|} P_k^\varepsilon(l)}$$

оценивает длительность периодов сходной временной эволюции рассматриваемых систем. По поведению этих мер часто можно установить наличие нелинейной связи между исследуемыми временными рядами [7]. С увеличением связи между исследуемыми процессами значения мер возрастают.

Для численных расчетов использовался пакет CRP Toolbox [8]. В среде Matlab был написан дополнительный программный блок для вычисления мер отдельно для каждой диагонали графика кросс-рекуррентности. На рис. 1 приведен график кросс-рекуррентности для среднегодовых значений  $\delta^{18}O$  во льдах Гренландии и температуры Фенноскандии. Вектора состояния соответствующих динамических систем (формула 1) были получены с помощью топологического вложения временных рядов в пространство  $R^m$  по алгоритму Такенса [9] с параметрами вложения  $m = 3$ ,  $\tau = 5$ . Данные были предварительно сглажены скользящим средним с шириной окна 5 для удаления шумовых высокочастотных флуктуаций. При построении ГКР использовалась  $L_\infty$ -норма,  $\varepsilon = 1,67$  (формула 1).

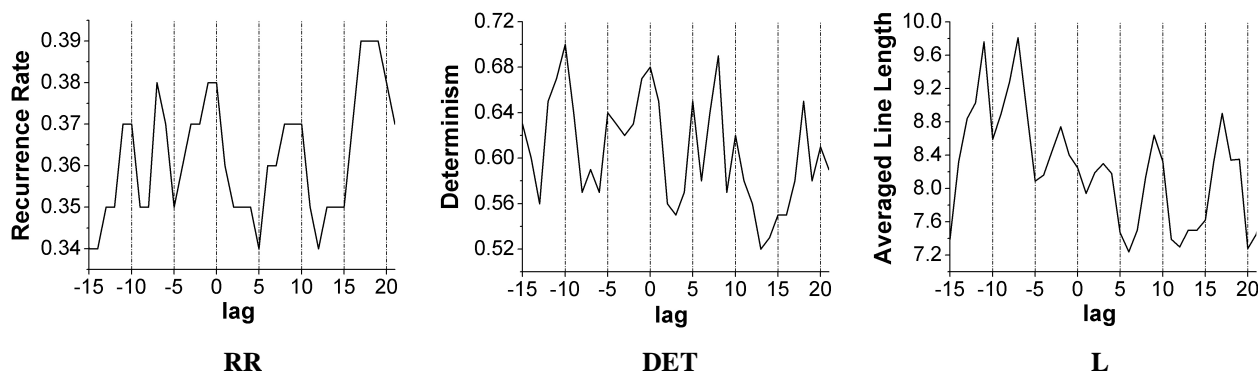


Рис. 2. Меры ГКР для среднегодовых значений  $\delta^{18}O$  во льдах Гренландии и температуры Фенноскандии

На рис. 2 приведена зависимость мер  $RR$ ,  $DET$  и  $L$  от временного лага для  $k \in [-15, +21]$ . Максимумы мер указывают на наличие нелинейной связи между исследуемыми рядами на данном лаге.

Максимумы мер были обнаружены на лаге – 11-10 лет ( $RR$ ,  $DET$  и  $L$ ); на лаге – 7 лет ( $RR$  и  $L$ ); на лаге – 1-0 лет ( $RR$ ,  $DET$  и  $L$ ); на лаге 8-9 лет ( $RR$ ,  $DET$  и  $L$ ); на лаге 17-18 лет ( $RR$ ,  $DET$  и  $L$ ).

Для данных с разрешением 5 лет максимумы соответствуют лагам: – 60 лет ( $RR$ ,  $DET$  и  $L$ ); – 20-15 лет ( $DET$  и  $L$ ,  $RR$  смещен); 60 лет ( $RR$  и  $DET$ ,  $L$  смещен). Максимумы мер для временных рядов с разрешением 10 лет были обнаружены на лаге – 90 лет ( $RR$ ,  $DET$  и  $L$ ); на лаге – 10 лет ( $DET$  и  $RR$ , для  $L$  слабо выражен); на лаге 70 лет ( $RR$ ,  $DET$  и  $L$ ).

Таким образом, методами кросс-рекуррентных графиков обнаружена климатическая связь между регионами Фенноскандии и Гренландии, которая проявляется со средней повторяемостью около 10 лет. В работе [6] было установлено, что связь ослабевает с увеличением временного масштаба и не обнаружима линейными методами. Результат подтверждает гипотезу о существовании единой системы атмосферной циркуляции в регионе Северной Атлантики.

Авторы благодарны сотрудникам лаборатории компьютерного моделирования Института математики за полезные советы и дискуссии в ходе выполнения работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Visbeck M. The ocean's role in Atlantic climate variability // Science. 2002. V. 297. P. 2223-2224.
2. Marshall J., Kushnir Y., Battisti D. et al North Atlantic climate variability: phenomena, impacts and mechanisms // International journal of climatology. 2001. V. 21. P. 1863-1898.

3. Helama S., Lindholm M., Timonen M., Merilainen J., Eronen M. The supra-long Scots pine tree-ring record for Finnish Lapland: Part 2, interannual to centennial variability in summer temperatures for 7500 years // Holocene. 2002. V. 12, N 6. P. 681-687.

4. Jousel J., Alley R.B., Cuffey K.M., Dansgaard W., Grootes P., Hoffmann G., Johnsen S.J., Koster R.D., Peel D., Shuman C.A., Stievenard M., Stuiver M., White J. Validity of the temperature reconstruction from water isotopes in ice cores // J. Geophys. Res. 1997. V. 102, N C12. P. 26471-26487.

5. <http://www.ncdc.noaa.gov/paleo/icecore/greenland/summit>.

6. Есимхан Е.Б., Пак И.Т. Диагностика взаимной связи между палеоклиматическими данными методами нелинейной динамики // Известия научно-технического общества "Казах". 2007. №1(16). С. 5-12.

7. Marwan N., Kurths J. Nonlinear analysis of bivariate data with cross recurrence plots // Physics Letters A. 2002. V. 302. P. 299-307.

8. <http://www.tocsy.agnld.uni-potsdam.de>

9. Sauer T., Yorke J.A., Casdagli M. Embedology // J. Statist. Phys. 1991. V. 65. P. 579-616.

#### Резюме

Палеоклиматтық екі уақыттық қатар арасында өзара байланыстың бар болу-болмауы кросс-рекурренттік графиктер әдістерімен зерттеледі. Бұл мәліметтер Солтүстік-Атлантика аймағы ауа райының соңғы 7,5 мың жылдағы жанама сипаттамасы болып табылады. 1, 5 және 10 жыл масштабында Гренландия мен Фенноскандия аймақтары арасындағы сызықсыз ауа райылық байланыс табылған.

#### Summary

In the article the existence of interrelation between two palaeoclimatic time series is investigated by cross-recurrence plots methods. These data are proxy characteristic of the climate of North Atlantic region during the last 7,5 thousand years. Nonlinear climatic interrelation between Greenland and Fennoscandia regions is revealed on the scales 1, 5 and 10 years.

УДК 519.61:551.583.7

Институт математики МОН РК,

г. Алматы

Поступила 10.06.07г.