

Филиппов А.Г. Еще раз к вопросу о системе криминалистики // Юридическое образование и наука. 2000. № 2.

15. Головин А.Ю. Теоретические основы и актуальные проблемы криминалистической систематики на современном этапе развития криминалистики : Диссертация на соискание ученой степени доктора юридических наук. Тула, 2002. 252 с.

16. Ермолович В.Ф. Криминалистическая характеристика преступлений. Минск, 2001.

17. Возгрин И.А. Основные положения учения о криминалистической характеристике преступлений // Криминалистика / Под ред. Т. А. Седовой и Л. А. Эксархопуло. СПб., 2001. С. 73-79.

18. Яблоков Н.П. Информационно-структурные основы изучения преступной деятельности // Криминалистика / Под ред. Н. П. Яблокова. М., 1999. С. 35-51.

### Резюме

Қазіргі криминалістік ғылым жүйесі және оның даму тенденциялары зерттелген. Автор қазіргі төрт элементті криминалістік ғылым жүйесін, оның алдында тұрған жалпы және жеке мәселелерге толық сәйкестігін және олардың санын арттыру немесе қысқарту тенденцияларына ешқандай қажеттілік жоқ екендігін белгілеген.

### Summary

In the article the author investigates modern system of criminalistical sciences and tendencies of its development. The author marks, that the modern four-element system of criminalistical sciences quite corresponds the general, special and private tasks and there is no necessity and tendencies to reduction or increase in their number.

КазГЮУ

Поступила 18.10.07г.

Б. Т. ЖУМАГУЛОВ, Б. РЫСБАЙУЛЫ, А. АДАМОВ

## СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА КОНВЕКТИВНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВЛАГИ

Формирование термического режима мерзлых пород сопровождается двумя типами процессов.

1. **кондуктивного механизма**, при котором перенос тепловой энергии не сопровождается переносом вещества, и

2. **конвективного механизма**, при котором перенос тепла обусловлен движением воды и воздуха в порах грунта.

Каждый из этих механизмов отличается своими специфическими особенностями, что заставляет рассматривать их отдельно один от другого.

По своей структуре промерзающие и протаивающие грунты всегда неоднородны. В промерзающих и протаивающих грунтах, в зависимости от фазового состава воды, выделяют три зоны – талого грунта, фазовых переходов и мерзлого грунта. В талой зоне грунта термоактивная влага находится только в жидкой форме, в зоне фазовых переходов вода и лед могут термодинамическом равновесии друг с другом и, наконец, в зоне мерзлого грунта практически вся термоактивная влага находится в фазе льда. В зависимости от того, в какой зоне протекает процесс переноса, механизм его существенно меняется, что заставляет рассматривать каждую зону отдельно.

### Система уравнений обобщенной задачи Стефана

В основу деления промерзающих грунтов на зоны был положен температурный признак. Тепло и влага обмен между зонами происходит только на их границах, а внутри зон механизм распространения тепла остается таким же, как при отсутствии других зон. Это нашло свое отражение, в том, что границами зон является  $\theta$ -изотерма талой зоны,  $\theta_1$ -изотерма мерзлой зоны. Положение изотермы  $\theta$  и  $\theta_1$  в пространстве не остается постоянным, так как температурное поле грунта меняется. Поэтому если обозначить через  $h$  координату  $z$  изотермы  $\theta$ , а через  $h_1$  — изотермы  $\theta_1$  то, вообще говоря,  $h$  и  $h_1$  будут функциями времени  $t$ .

Постановка задачи. В области  $Q = (0, H) \times (0, t_0)$  изучается задачи

$$\gamma c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad 0 < z < H, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \delta \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad 0 < z < h(t), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \beta \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad h(t) < z < h_1(t), \quad (3)$$

где  $(0, h(t))$  – талая зона;  $(h(t), h_1(t))$  – фазовая зона;  $(h(t), H)$  – мерзлая зона.

Граничные условия для температуры:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = -\alpha(T - T_0(t)),$$

при  $z = H; T = T_1 = \text{const}$  при  $z = 0$ . (4)

Граничные условия для влажности  $\omega(t, z)$

$$\omega = \omega_1 \text{ при } z = 0.$$

$$k \frac{\partial \omega_T}{\partial z} + k\delta \frac{\partial T_T}{\partial z} - \beta \frac{\partial T}{\partial z} \quad \Delta_2 \omega \frac{dh}{dt} \text{ при } z = h(t),$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0 \text{ при } z = h_1(t). \quad (5)$$

Начальные условия для влажности и температуры

$$T(z, 0) = T_0(z), \quad \omega(z, 0) = \omega_0(z). \quad (6)$$

Заметим, что уравнение миграции в мерзлой зоне отсутствует.

Где  $C = C(T, \omega, z)$ ,  $\lambda = \lambda(T, \omega, z)$ ,  $\gamma = \gamma(z)$ .

Причем

$$C = C_m + \omega_n C_s + \omega_l C_l + q_0 \nu \sigma_0(\theta, \theta_1),$$

$$\nu = \frac{d\omega_n}{dT}.$$

$$\lambda = \lambda_m + q_0 \gamma_0 \beta, \quad \beta = k(\nu + \delta),$$

$\beta$  – суммарный коэффициент влагопроводимости;  $\delta$  – термоградиентный коэффициент;  $k$  – коэффициент влагопроводимости;

Здесь

$$\sigma_0(\theta, \theta_1) = \begin{cases} 1, \text{ при } T(z, t) \in (\theta, \theta_1) \\ 0, \text{ при } T(z, t) \notin (\theta, \theta_1) \end{cases}$$

$$\delta(T, z) = \nu(T, z) = 0, \text{ если } T(z, t) \notin (\theta, \theta_1)$$

$$\omega = \omega_n + \omega_l,$$

$\omega_n$  – доля незамерзшей воды в грунте;  $\omega_l$  – доля льда в грунте.

**Замечание 1.** Зная влажность грунта в точке  $z = h(t)$ , можно определить  $\omega_n = \omega_n(T)$ , когда  $h(t) \leq z \leq h_1(t)$ . Если  $T > \theta$  то  $\omega_n = \omega$ , а если  $T < \theta_1$ , то  $\omega_n = \omega_{нсс}$ .

**Замечание 2.** Если ввести функцию  $T(z, t) - T_1 = \tilde{T}(z, t)$ ,  $\omega(z, t) - \omega_1 = \tilde{\omega}(z, t)$ , то при  $z = 0$  функции  $\tilde{T}$  и  $\tilde{\omega}$  обращаются в нуль. Поэтому дальнейшем считаем, что  $T_1 = 0$  и  $\omega_1 = 0$ .

Пусть грунт состоит из  $k$  различных слоев (земля, песок, суглинок и т.д.). Тогда область

$$(0, H) = \bigcup_{i=0}^{k-1} (z_i, z_{i+1}), \text{ где } z_0 = 0, \quad z_k = H.$$

В точках перехода от одного слоя к другому слою имеет места равенства:

$$\left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial t} \right] = 0, \quad \left[ k \frac{\partial \omega}{\partial z} \right] = 0, \quad \left[ k\delta \frac{\partial T}{\partial z} \right] = 0. \quad (7)$$

Разностная схема для задачи (1)–(7)

$$C\gamma Y_i = (\lambda Y_{\bar{z}})_z, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad hN = H. \quad (8)$$

$$W_i = (kW_{\bar{z}})_z + (k\delta Y_{\bar{z}})_z, \quad 0 \leq z_i \leq h(t), \quad (9)$$

$$W_i = (\beta W_{\bar{z}})_z, \quad h(t) < z(t) \leq h_1(t). \quad (10)$$

Граничное условие при  $z = H$  для температуры

$$\lambda Y_{N\bar{t}} = -\alpha(Y_N - T_0(t)), \quad (11)$$

$$Y_0 = 0, \quad W_0 = 0, \quad (12)$$

$$kW_{\bar{z}} + k\delta Y_{\bar{z}} - \beta Y_z = \Delta_2 W h_i, \text{ при } z = h(t), \quad (13)$$

$$W_i = 0, \text{ при } z = h_1(t). \quad (14)$$

**Теорема 2.** Пусть  $T(z, t)$  и  $\omega(z, t)$  являются решением задачи (1)–(7). Если  $0 < C \leq C_1$ ,  $\lambda \leq C_2 < \infty$ ,  $|C| < C_3 < \infty$ ,  $|\lambda| \leq C_4 < \infty$  и  $(T(z, t), \omega(z, t)) \in W_2^2(0, t_0; W_2^3(0, H))$ , то решение приближенной задачи (8)–(14) сходится к решению исходной задачи при  $\Delta t, h \rightarrow 0$ . При этом справедливо оценка

$$\max_t \|U\|^2 + \sum_t \|U_{\bar{x}}\|^2 \Delta t + \max_t \|V\|^2 + \sum_t \|V\|^2 \leq C(\Delta t + h)^2,$$

где  $U = T - Y$ ,  $V = \omega - W$ .

$$\text{Норма } \|U\|^2 = \sum_{j=1}^N U^2 h, \quad \|V\|^2 = \sum_{t=0}^{z=h(t)} V^2 h.$$

Доказательство.

Перепишем разностную схему (8) в виде

$$A_i Y_{i+1}^{i+1} - B_i Y_i^{i+1} + C_i Y_{i-1}^{i+1} + Y_i^j = 0,$$

где  $A_i = \frac{\Delta t \lambda_{i+1/2}}{h^2 cp}$ ,  $C_i = \frac{\Delta t \lambda_{i+1/2}}{h^2 cp}$ ,  $B_i = A_i + C_i + 1$ .

Отсюда

$$B_i Y_i^{i+1} = A_i Y_{i+1}^{i+1} + C_i Y_{i-1}^{i+1} + Y_i^j$$

$$\text{или } B_i |Y_i^{j+1}| = A_i |Y_{i+1}^{j+1}| + C_i |Y_{i-1}^{j+1}| + |Y_i^j|.$$

Пусть  $\max_i |Y_i^{j+1}| = |Y_k^{j+1}|$ , тогда  $(B_i - A_i - C_i) \times |Y_k^{j+1}| \leq |Y_i^j|$  для любого  $i$ . Поэтому

$$\max_i |Y_i^{j+1}| \leq \max_i |Y_i^j|. \quad (15)$$

Допустим, что  $\max_i |Y_i^{j+1}| = |Y_N^{j+1}|$ , т.е. максимум достигается на границе области при  $z = H$  в этом случае рассматривается (11), т.е.

$$\frac{Y_N^{j+1} - Y_{N-1}^{j+1}}{h} + \frac{\alpha}{\lambda} Y_N^{j+1} = \frac{\alpha}{\lambda} T_0(t), \quad E = \frac{\alpha h}{\lambda},$$

$$|Y_N^{j+1}| \leq \frac{E}{1+E} |Y_N^{j+1}| + \frac{E}{1+E} |T_0(t)|$$

окончательно получим  $|Y_N^{j+1}| \leq |T_0(t)|$ . Объединяя его с (15) получим

$$\max_i |Y_i^{j+1}| \leq \sup_i \{ \max_i |Y_i^0|, T_0(t) \}, \quad (16)$$

т.е.  $Y_i^{j+1}$  является ограниченной функцией. Проинтегрируем (1) по  $z$  от  $z_{i-1/2}$  до  $z_{i+1/2}$ . Тогда для разности  $U = T - u$  справедливо равенства

$$cpU_{\bar{i}} = (\lambda(Y_{i-1/2})U_{\bar{z}} + \psi_2 + \psi_3)_z + \psi_1, \quad (17)$$

где  $\psi_1, \psi_2, u\psi_3$  невязки и справедливо соотношение

$$|\psi_1| \leq C_1 \Delta t, \quad |\psi_2| \leq C_2 \Delta h, \quad |\psi_3| \leq C_3 \Delta t + C_4 |\tilde{U}|.$$

Умножим (17) на  $\frac{2Uh\Delta t}{cp}$  и суммируем по  $i$  от

1 до  $N-1$ . Тогда

$$2 \sum_i U_{\bar{i}} Uh \Delta t - 2 \sum_i (\lambda \tilde{Y}) U_{\bar{z}} + \psi_2 + \psi_3 \frac{2Uh\Delta t}{cp} + 2 \sum_i \psi_1 Uh \Delta t.$$

Суммирую по частям и учитывая граничные условия получим

$$\|U\|_{\bar{i}}^2 \Delta t + \|U_z\|^2 \Delta t \leq C_5 \|U_z\| (\|\psi_2\| + \|\psi_3\|) +$$

$$+ C_6 \|U_z\| \|U\| \max_i |T_z| + C_7 \|U\| \|\psi_1\| \Delta t$$

или применяя  $\varepsilon$  неравенство Коши выводим

$$\|U\|_{\bar{i}}^2 \Delta t + \|U_z\|^2 \Delta t \leq \quad (18)$$

$$\leq C_8 (\|U\|^2 + \|\tilde{U}\|^2) + C_9 (\Delta t + h)^2 + C_{10} \|V\|^2 \Delta t.$$

Задача (8)–(14) решается потоковым вариантом метода прогонки. Поэтому использую формулу потоковой прогонки

$$\gamma_{i+1} = \frac{A_i(\gamma_i + Y_i^j)}{A_i + \alpha_i + 1}$$

получим оценку

$$\max_i |\gamma_{i+1}| \leq \frac{A_i \max_i |\gamma_i| + \max_i |Y_i^j|}{A_i + \lambda_i + 1}$$

или

$$\max_i |\gamma_{i+1}| \leq (\alpha_i + 1) \max_i |Y_i^j| \leq C_{11} < \infty$$

с другой стороны

$$\omega_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_i + 1} \omega_{i+1} + \frac{\gamma_i - \alpha_i Y_i^j}{\alpha_i + 1}.$$

Отсюда получается оценки

$$\max_i |\omega_i| = \max_i \left| \frac{\lambda}{cp} Y_{\bar{z}} \right| \leq C_{12} < \infty.$$

Из условия согласования при  $z = h(t)$

$$\lambda Y_{\bar{z}} - \lambda Y_z = p \frac{dh}{dt}$$

следует ограниченность  $\frac{dh}{dt}$ .

Тогда из условия (13) следует, что

$$|kW_{\bar{z}}| \leq C_{13} < \infty \quad \text{при } z = h(t).$$

Проинтегрируем уравнение (2) по  $z$  от  $z_{i-1/2}$  до  $z_{i+1/2}$ . Полученное выражение отнимается от уравнений (8). Тогда для разности  $V = \omega(z_i, t_j) - W_i^j$  получается уравнение:

$$V_{\bar{z}} = (kV_{\bar{z}})_z + (k\delta U_{\bar{z}})_z + (\psi_4 + \psi_5)_x + \psi_6, \quad (19)$$

где

$$\psi_4 = k\delta(T_{i-1/2}) \left[ \frac{\delta T(z_{i-1/2}, t_{j+1})}{\partial z} - T_{\bar{z}} \right],$$

$$\psi_5 = k \left[ \delta(T_{i-1/2}) - \delta(\tilde{Y}_{i-1/2}) \right] T_{\bar{z}},$$

$$\psi_6 = \frac{1}{h} \int_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}} \left[ \omega_{\bar{z}} - \frac{\partial \omega(\xi, t)}{\partial t} \right] d\xi.$$

Из условия теоремы и из ограниченности  $\tilde{Y}_{i-1/2}$  следует оценки

$$\|\psi_5\| \leq C_{14}h, \quad \|\psi_6\| \leq C_{15}h + C_{16}\|\tilde{U}\|, \quad \|\psi_z\| \leq C_{15}\Delta t.$$

Умножим (19) на  $2Vh\Delta t$  и суммируем по  $i$  от 0 до  $h(t)$ . Тогда

$$\begin{aligned} & 2 \sum_i V_{\bar{z}} V h \Delta t + 2 \sum_i k (V_{\bar{x}})^2 h \Delta t = \\ & = k V_{\bar{z}} \cdot V|_{h(t)} \Delta t + k \delta U_{\bar{z}} \cdot V|_{h(t)} \Delta t + 2 \sum_i k \delta U_{\bar{z}} \cdot V_{\bar{z}} \cdot h \Delta t + \\ & + 2 \sum_i (\psi_4 + \psi_5) V_{\bar{z}} h \Delta t + 2 \sum_i \psi_6 V h \Delta t. \end{aligned}$$

или после применение неравенство Коши учитывая ранее полученные соотношения выводим.

$$\begin{aligned} & \|V\|_{\bar{z}}^2 + 2k \|V_{\bar{x}}\|^2 \Delta t \leq \\ & \leq C_{18} \left( \|U_{\bar{x}}\|_{\varepsilon}^2 + \|\tilde{U}\|^2 \right) + \delta \|V_{\bar{x}}\|^2 + C_{19} (\Delta t + h)^2. \quad (20) \end{aligned}$$

Параметр  $\delta$  подбираем из условия  $2k - \delta \geq \delta$ . Тогда

$$\|V\|_{\bar{z}}^2 + k \sum \|V_{\bar{x}}\|^2 \leq C_{18} \left( \|U_{\bar{x}}\|_{\varepsilon}^2 + \|\tilde{U}\|^2 \right) + C_{19} (\Delta t + h)^2.$$

Умножим (18) на достаточно большое число и складываем с (20). Тогда после соответствующего подбора  $\delta$  получим:

$$\begin{aligned} & \|U\|_{\bar{z}}^2 + \|\bar{V}\|_{\bar{z}}^2 + \|U_{\bar{z}}\|^2 \Delta t + \|V_{\bar{z}}\|^2 \Delta t \leq C_{20} (\|U\|^2 + \\ & + \|V\|^2 + \|\tilde{U}\|^2) \Delta t + C_{21} (\Delta t + h)^2. \end{aligned}$$

Из последнего неравенство применяя лемму Гронуолла выведем оценки

$$\max_i \left( \|U\|^2 + \|V\|^2 \right) + \sum_t \left( \|U_{\bar{z}}\|^2 + \|\tilde{V}_{\bar{z}}\|^2 \right) \Delta t \leq$$

$$\leq C_{22} (\Delta t + h)^2$$

или

$$\begin{aligned} & \max_i \left( \|T_0^j - Y^j\|^2 + \|\omega^j - W^j\|^2 \right) + \\ & + \sum_j \left( \|T_{\bar{z}} - Y_{\bar{z}}^j\|^2 + \|\omega_z - W_{\bar{z}}^j\|^2 \right) \Delta t \leq C_{22} (\Delta t + h)^2. \end{aligned}$$

Напомним, что  $(T, \omega)$  – решение задачи (1)–(7) а  $(Y, W)$  – решение разностной задачи (8)–(14).

**Замечание 3.** Если все коэффициенты системы (1)–(7) кусочно-постоянны, грунт однослойный и среда однофазовая, то точность схемы (8)–(14) будет

$$\theta(\Delta t + h^2).$$

При этом граничные условия

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial t} = -\alpha (T - T_0(t))$$

выражением.

$$\lambda \left( \tilde{Y}_{N-1/2} \right) \frac{Y_N - Y_{N-1}}{2} = -\alpha \left( \frac{Y_N + Y_{N-1}}{2} - T_0(t) \right).$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1976. 350 с.
2. Мейрманов А.М. Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1986. 239 с.
3. Рысбайулы Б. Метод конечных разностей для одномерного теплопроводного вязкого сжимаемого газа с контактным разрывом // Сибирский журнал вычислительной математики СО РАН. 2001. №3. Т. 4. С. 295-303.
4. Адамов А.А. Сходимость приближенного метода обобщенной задачи Стефана // Вестник ЕНУ. 2005. №2(42). С. 45-50.
5. Рысбайулы Б., Адамов А.А. Сходимость приближенного метода расчета промерзания грунтов земельного полотна // Вестник НАН РК. 2005. №4. С. 54-57.

#### Резюме

Көп қабатты облыстағы жылу және ылғалдылықтың бір елшемді конвективті таралуы зерттеледі. Жуықтап есептеу әдісі ұсынылады және жуықтау есебінің шешімінің бастапқы есептің шешіміне жинақталуы дәлелденеді.

#### Summary

One-dimensional convectational distribution of heat and moisture in multilevel domain is studied. Approximate method is offered and the convergence of the approximate problem solution to the solution of initial problem is proved.

Поступила 8.10.07г.