Б. Т. ЖУМАГУЛОВ, Б. РЫСБАЙУЛЫ, А. АДАМОВ

СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА КОНВЕКТИВНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВЛАГИ

Формирование термического режима мерзлых пород сопровождается двумя типами процессов.

1. **кондуктивного механизма**, при котором перенос тепловой энергии не сопровождается переносом вещества, и

2. **конвективного механизма**, при котором перенос тепла обусловлен движением воды и воздуха в порах грунта.

Каждый из этих механизмов отличается своими специфическими особенностями, что заставляет рассматривать их отдельно один от другого.

По своей структуре промерзающие и протаивающие грунты всегда неоднородны. В промерзающих и протаивающих грунтах, в зависимости от фазового состава воды, выделют три зоны – талого грунта, фазовых переходов и мерзлого грунта. В талой зоне грунта термоактивная влага находится только в жидкой форме, в зоне фазовых переходов вода и лед могут термодинамическом равновесии друг с другом и, наконец, в зоне мерзлого грунта практически вся термоактивная влага находится в фазе льда. В зависимости от того, в какой зоне протекает процесс переноса, механизм его существенно меняется, что заставляет рассматривать каждую зону отдельно.

Система уравнений обобщенной задачи Стефана

В основу деления промерзающих грунтов на зоны был положен температурный признак. Тепло и влаго обмен между зонами происходит только на их границах, а внутри зон механизм распространения тепла остается таким же, как при отсутствии других зон. Это нашло свое отражение, в том, что границами зон является θ-изотерма талой зоны, θ_1-изотерма мерзлой зоны. Положение изотермы θ и θ_1 в пространстве не остается постоянным, так как температурное поле грунта меняется. Поэтому если обозначить через h координату z изотермы θ, а через h_1 — изотермы θ_1 то, вообще говоря, h и h_1 будут функциями времени t.

Постановка задачи. В области $Q=(0,H)\times(0,t_0)$ изучается задачи

$$\gamma c\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right), \qquad 0<z<H, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\delta\frac{\partial T}{\partial z}\right), \quad 0<z<h(t), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\beta \frac{\partial T}{\partial z}\right),\quad h(t)<z<h_1(t), \quad (3)$$

где (0, $h(t)$) – талая зона; ($h(t)$, $h_1(t)$) – фазовая зона; ($h(t)$, H) – мерзлая зона.

Граничные условия для температуры:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z}=-\alpha(T-T_0(t)),$$

при $z = H$; $T = T_1$ = const при $z = 0$. (4)

Граничные условия для влажности $\omega(t,z)$

$$\omega=\omega_1 \text{ при } z=0.$$

$$k\frac{\partial \omega_T}{\partial z}+k\delta\frac{\partial T_T}{\partial z}-\beta\frac{\partial T}{\partial z} \quad \Delta_2\omega\frac{dh}{dt} \text{ при } z=h(t),$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}=0 \text{ при } z=h_1(t). \quad (5)$$

Начальные условия для влажности и температуры

$$T(z,0)=T_0(z),\ \omega(z,0)=\omega_0(z). \quad (6)$$

Заметим, что уравнение миграции в мерзлой зоне отсутствует.

Где $C=C(T,\omega,z)$, $\lambda=\lambda(T,\omega,z)$, $\gamma=\gamma(z)$.
Причем

$$C=C_м+\omega_н C_в+\omega_л C_л+q_0\nu\ \sigma_0(\theta,\theta_1),$$

$$\nu=\frac{d\omega_н}{dT}.$$

$$\lambda=\lambda_м+q_0\gamma_0\beta,\ \beta=k(\nu+\delta),$$

β – суммарный коэффициент влагопроводимости; δ – термоградиентный коэффициент; k – коэффициент влагопроводимости;
Здесь

$$\sigma_0(\theta,\theta_1)=\begin{cases}1, при T(z,t)\in(\theta,\theta_1)\\ 0, при T(z,t)\notin(\theta,\theta_1)\end{cases}$$

$$\delta(T,z)=\nu(T,z)=0,\text{ если } T(z,t)\notin(\theta,\theta_1)$$

$$\omega=\omega_н+\omega_л,$$

$\omega_н$ – доля незамерзшей воды в грунте; $\omega_л$ – доля льда в грунте.

Замечание 1. Зная влажность грунта в точке $z=h(t)$, можно определит $\omega_н=\omega_н(T)$, когда $h(t)\le z\le h_1(t)$. Если $T>\theta$ то $\omega_н=\omega$, а если $T<\theta_1$, то $\omega_н=\omega_{нсв}$.

Замечание 2. Если ввести функцию $T(z,t)-T_1=\tilde{T}(z,t)$, $\omega(z,t)-\omega_1=\tilde{\omega}(z,t)$, то при $z=0$ функции $\tilde{T}$ и $\tilde{z}$ обращаются в нуль. Поэтому дальнейшем считаем, что $T_1=0$ и $\omega_1=0$.

Пусть грунт состоит из k азличных слоев (земля, песок, суглинок и т.д.). Тогда область $(0,H)=\bigcup_{i=0}^{k-1}(z_i,z_{i+1})$, где $z_0=0$, $z_k=H$.

В точках перехода от одного слоя к другому слою имеет места равенства:

$$\left[\lambda\frac{\partial T}{\partial t}\right]=0,\ \left[k\frac{\partial \omega}{\partial z}\right]=0,\ \left[k\delta\frac{\partial T}{\partial z}\right]=0. \quad (7)$$

Разностная схема для задачи (1)–(7)

$$C\gamma Y_t=(\lambda Y_{\bar z})_z,\ i=1,2,\dots,N;\ hN=H. \quad (8)$$

$$W_{\bar t}=(kW_{\bar z})_z+(k\delta Y_{\bar z})_z,\ 0\le z_i\le h(t), \quad (9)$$

$$W_{\bar t}=(\beta W_{\bar z})_z,\ h(t)<z(t)\le h_1(t). \quad (10)$$

Граничное условие при $z = H$ для температуры

$$\lambda Y_{N\bar t}=-\alpha(Y_N-T_0(t)), \quad (11)$$

$$Y_0=0,\ W_0=0, \quad (12)$$

$$kW_{\bar z}+k\delta Y_{\bar z}-\beta Y_z=\Delta_2 W h_{\bar t},\ \text{при } z=h(t), \quad (13)$$

$$W_{\bar t}=0,\ \text{при } z=h_1(t). \quad (14)$$

Теорема 2. Пусть $T(z,t)$ и $\omega(z,t)$ являются решением задачи (1)–(7). Если $0<C\le C_1$, $\lambda\le C_2<\infty$, $\|C'\|<C_3<\infty$, $\|\lambda'\|\le C_4<\infty$ и $(T(z,t),\omega(z,t))\in W_2^2(0,t_0;W_2^3(0,H))$, то решение приближенной задачи (8)–(14) сходится к решению исходной задачи при $\Delta t,h\to 0$. Причем справедливо оценка

$$\max_t\|U\|^2+\sum_t\|U_{\bar x}\|^2\Delta t+\max_t\|V\|^2+$$

$$+\sum_t\|V\|^2\le C(\Delta t+h)^2,$$

где $U=T-Y$, $V=\omega-W$.

Норма $\|U\|^2=\sum_{j-1}^{N}U^2h,\ \|V\|^2=\sum_{t=0}^{z=h(t)}V^2h.$

Доказательство.

Перепишем разностную схему (8) в виде

$$A_i Y_{i+1}^{i+1} - B_i Y_i^{i+1} + C_i Y_{i-1}^{i+1} + Y_i^j = 0,$$

где $A_i = \dfrac{\Delta t}{h^2}\dfrac{\lambda_{i+1/2}}{cp}$, $C_i = \dfrac{\Delta t}{h^2}\dfrac{\lambda_{i+1/2}}{cp}$, $B_i = A_i + C_i + 1.$

Отсюда

$$B_i Y_i^{i+1} = A_i Y_{i+1}^{i+1} + C_i Y_{i-1}^{i+1} + Y_i^j$$

или $B_i \left\| Y_i^{j+1} \right\| = A_i \left\| Y_{i+1}^{j+1} \right\| + C_i \left\| Y_{i-1}^{j+1} \right\| + \left\| Y_i^j \right\|.$

Пусть $\max\limits_i \left\| Y_i^{j+1} \right\| = \left\| Y_k^{j+1} \right\|$, тогда $(B_i - A_i - C_i)\times$ $\times \left\| Y_k^{j+1} \right\| \le \left\| Y_i^j \right\|$ для любого i. Поэтому

$$\max_i \left\| Y_i^{j+1} \right\| \le \max_i \left\| Y_i^{j-1} \right\|. \qquad (15)$$

Допустим, что $\max\limits_i \left| Y_i^{j+1} \right| = \left| Y_N^{j+1} \right|$, т.е. максимум достигается на границе области при $z = H$ в этом случае рассматривается (11), т.е.

$$\frac{Y_N^{j+1} - Y_{N-1}^{j+1}}{h} + \frac{\alpha}{\lambda} Y_N^{j+1} = \frac{\alpha}{\lambda} T_0(t),\ E = \frac{\alpha h}{\lambda},$$

$$\left\| Y_N^{j+1} \right\| \le \frac{E}{1+E}\left\| Y_N^{j+1} \right\| + \frac{E}{1+E}\left\| T_0(t) \right\|$$

окончательно получим $\left\| Y_N^{j+1} \right\| \le \left\| T_0(t) \right\|$. Объединяя его с (15) получим

$$\max_i \left\| Y_i^{j+1} \right\| \le \sup\left\{ \max_i \left\| Y_i^0 \right\|, T_0(t) \right\}, \qquad (16)$$

т.е. Y_i^{j+1} является ограниченной функцией. Проинтегрируем (1) по z от $z_{i-1/2}$ до $z_{i+1/2}$. Тогда для разности. $U = T - y$ справедливо равенства

$$cpU_{\bar t} = (\lambda(Y_{i-1/2})U_{\bar z} + \psi_2 + \psi_3)_z + \psi_1, \quad (17)$$

где $\psi_1, \psi_2, u\psi_3$ невязки и справедливо соотношение

$$\left\| \psi_1 \right\| \le C_1 \Delta t,\quad \left\| \psi_2 \right\| \le C_2 \Delta h,\quad \left\| \psi_3 \right\| \le C_3 \Delta t + C_4 \left\| \breve U \right\|.$$

Умножим (17) на $\dfrac{2Uh\Delta t}{cp}$ и суммируем по i от 1 до $N-1$. Тогда

$$2\sum U_{\bar t} U h \Delta t$$

$$2\sum_i \left(\lambda(\breve Y) U_{\bar z} + \psi_2 + \psi_3 \right)_z \frac{2Uh\Delta t}{cp} + 2\sum_i \psi_1 U h \Delta t.$$

Суммирую по частям и учитывая граничные условия получим

$$\left\| U \right\|_{\bar t}^2 \Delta t + \left\| U_z \right\|^2 \Delta t \le C_5 \left\| U_z \right\| \left(\left\| \psi_2 \right\| + \left\| \psi_3 \right\| \right) +$$

$$+ C_6 \left\| U_z \right\| \left\| U \right\| \max_i \left| T_z \right| + C_7 \left\| U \right\| \left\| \psi_1 \right\| \Delta t$$

или применяя ε неравенство Коши выводим

$$\left\| U \right\|_{\bar t}^2 \Delta t + \left\| U_z \right\|^2 \Delta t \le \qquad (18)$$

$$\le C_8 \left(\left\| U \right\|^2 + \left\| \breve U \right\|^2 \right) + C_9 (\Delta t + h)^2 + C_{10} \left\| V \right\|^2 \Delta t.$$

Задача (8)–(14) решается потоковым вариантом метода прогонки. Поэтому использую формулу потоковой прогонки

$$\gamma_{i+1} = \frac{A_i(\gamma_i + Y_i^j)}{A_i + \alpha_i + 1}$$

получим оценку

$$\max_i \left| \gamma_{i+1} \right| \le \frac{A_i \max\limits_i \left| \gamma_i \right| + \max\limits_i \left| Y_i^j \right|}{A_i + \lambda_i + 1}$$

или

$$\max_i \left| \gamma_{i+1} \right| \le (\alpha_i + 1) \max_i \left| Y_i^j \right| \le C_{11} < \infty$$

с другой стороны

$$\omega_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_i + 1}\omega_{i+1} + \frac{\gamma_i - \alpha_i Y_i^j}{\alpha_i + 1}.$$

Отсюда получается оценки

$$\max_i \left| \omega_i \right| = \max_i \left| \frac{\lambda}{cp} Y_{\bar z} \right| \le C_{12} < \infty.$$

Из условия согласования при $z = h(t)$

$$\lambda Y_{\bar z} - \lambda Y_z = p\frac{dh}{dt}$$

следует ограниченность $\dfrac{dh}{dt}$.

Тогда из условия (13) следует, что

$$\left| kW_{\bar z} \right| \le C_{13} < \infty \quad \text{при} \quad z = h(t).$$

Проинтегрируем уравнение (2) по z от $z_{i-1/2}$ до $z_{i+1/2}$. Полученное выражение отнимается от уравнений (8). Тогда для разности $V = \omega(z_i, t_j) - W_i^j$ получается уравнение:

$$V_{\bar{t}} = \left(kV_{\bar{z}}\right)_z + \left(k\delta U_{\bar{z}}\right)_z + \left(\psi_4 + \psi_5\right)_x + \psi_6, \quad (19)$$

где

$$\psi_4 = k\delta\left(T_{i-1/2}\right)\left[\frac{\delta T(z_{i-1/2}, t_{j+1})}{\partial z} - T_{\bar{i}\bar{z}}\right],$$

$$\psi_5 = k\left[\delta(T_{i-1/2}) - \delta(\breve{Y}_{i-1/2})\right]T_{\bar{i}\bar{z}},$$

$$\psi_6 = \frac{1}{h}\int_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}}\left[\omega_{\bar{t}} - \frac{\partial\omega(\xi, t)}{\partial t}\right]d\xi .$$

Из условия теоремы и из ограниченности $\breve{Y}_{i-1/2}$ следует оценки

$$\|\psi_5\| \le C_{14}h, \quad \|\psi_6\| \le C_{15}h + C_{16}\|\breve{U}\|, \quad \|\psi_z\| \le C_{15}\Delta t .$$

Умножим (19) на $2Vh\Delta t$ и суммируем по i от 0 до $h(t)$. Тогда

$$2\sum_i V_{\bar{t}}Vh\Delta t + 2\sum_i k(V_{\bar{x}})^2 h\Delta t =$$

$$= kV_{\bar{z}}\cdot V\big|_{h(t)}\Delta t + k\delta U_{\bar{z}}\cdot V\big|_{h(t)}\Delta t + 2\sum k\delta U_{\bar{z}}\cdot V_{\bar{z}}\cdot h\Delta t +$$

$$+2\sum_i\left(\psi_4 + \psi_5\right)V_{\bar{z}}h\Delta t + 2\sum_i \psi_6 Vh\Delta t.$$

или после применение неравенство Коши учитывая ранее полученные соотношения выводим.

$$\|V\|_{\bar{t}}^2 + 2k\|V_{\bar{x}}\|^2\Delta t \le$$

$$\le C_{18}\left(\|U_{\bar{x}}\|_\varepsilon^2 + \|\breve{U}\|^2\right) + \delta\|V_{\bar{x}}\|^2 + C_{19}(\Delta t + h)^2 . \quad (20)$$

Параметр δ подбираем из условия $2k - \delta \ge \delta$. Тогда

$$\|V\|_{\bar{t}}^2 + k\sum\|V_{\bar{x}}\|^2 \le C_{18}\left(\|U_{\bar{x}}\|^2\varepsilon + \|\breve{U}\|^2\right) + C_{19}\left(\Delta t + h\right)^2.$$

Умножим (18) на достаточно большое число и складываем с (20). Тогда после соответствующего подбора δ получим:

$$\|U\|_{\bar{t}}^2 + \|\bar{V}\|_{\bar{t}}^2 + \|U_{\bar{z}}\|^2\Delta t + \|V_{\bar{z}}\|^2\Delta t \le C_{20}(\|U\|^2 +$$

$$+\|V\|^2 + \|\breve{U}\|^2)\Delta t + C_{21}\left(\Delta t + h\right)^2 .$$

Из последнего неравенство применяя лемму Гроноулла выведем оценки

$$\max_i\left(\|U\|^2 + \|V\|^2\right) + \sum_t\left(\|U_{\bar{z}}\|^2 + \|\breve{V}_{\bar{z}}\|^2\right)\Delta t \le$$

$$\le C_{22}\left(\Delta t + h\right)^2$$

или

$$\max_i\left(\|T_0^j - Y^j\|^2 + \|\omega^j - W^j\|^2\right) +$$

$$+\sum_j\left(\|T_{\bar{z}} - Y_{\bar{z}}^j\|^2 + \|\omega_z - W_{\bar{z}}^j\|^2\right)\Delta t \le C_{22}\left(\Delta t + h\right)^2 .$$

Напомним, что (T, ω) – решение задачи (1)–(7) а (Y, W) – решение разностной задачи (8)–(14).

Замечание 3. Если все коэффициенты системы (1)–(7) кусочно-постоянны, грунт однослойный и среда однофазовая, то точность схемы (8)–(14) будет

$$\theta\left(\Delta t + h^2\right).$$

При этом граничные условия $\lambda\frac{\partial T}{\partial t} = -\alpha\left(T - T_0(t)\right)$ аппроксимируется выражением.

$$\lambda\left(\breve{Y}_{N-1/2}\right)\frac{Y_N - Y_{N-1}}{2} = -\alpha\left(\frac{Y_N + Y_{N-1}}{2} - T_0(t)\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1976. 350 с.

2. *Мейрманов А.М.* Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1986. 239 с.

3. *Рысбайулы Б.* Метод конечных разностей для одномерного теплопроводного вязкого сжимаемого газа с контактным разрывом // Сибирский журнал вычислительной математики СО РАН. 2001. №3. Т. 4. С. 295-303.

4. *Адамов А.А.* Сходимость приближенного метода обобщенной задачи Стефана // Вестник ЕНУ. 2005. №2(42). С. 45-50.

5. *Рысбайулы Б., Адамов А.А.* Сходимость приближенного метода расчета промерзания грунтов земельного полотна // Вестник НАН РК. 2005. №4. С. 54-57.

Резюме

Көп қабатты облыстағы жылу және ылғалдылықтың бір өлшемді конвективті таралуы зерттеледі. Жуықтап есептеу әдісі ұсынылады және жуықтау есебінің шешімінің бастапқы есептің шешіміне жинақталуы дәлелденеді.

Summary

One-dimensional convectional distribution of heat and moisture in multilevel domain is studied. Approximate method is offered and the convergence of the approximate problem solution to the solution of initial problem is proved.

Поступила 8.10.07г.