$$P_{k+1}[\vec{u}(g)] = \Pi_{\Gamma}^{T} P_k[\vec{u}(g)], \qquad (13)$$

где Π_A, Π_B, Π_Γ – матрицы переходных вероятностей информационного вектора, вектора ошибок и вектора управления соответственно.

2. Множество допустимых комбинаций векторов образует группу над полем Галуа $GF(2)$.

3. Размерность векторов имеет длину n.

Начальные условия:

$$\vec{X}_0(g), \vec{W}_0(g), P_0[\vec{X}(g)], P_0\left[\vec{W}(g)\right], \vec{u}_0(g), P_0[\vec{u}(g)]. \qquad (14)$$

Априорные данные:

$$P\left[\vec{X}(g)\right] \cdot \vec{W}(g) = P\left[\vec{X}(g)\right] \cdot \vec{W}(g). \qquad (15)$$

Структурная схема предложенной модели адаптивной ЦИСС стандарта GSM представлена на рис. 3.

Оценку принимаемого сообщения и отклика на управляющее воздействие выполняет устройство приема цифровых сигналов (УПЦС). На основе полученного отклика вырабатывается вектор управления в соответствии с законом, который представлен как функция μ. Для описания отклика на управляющее воздействие используется функция f, представляющая собой зависимость распределения вероятностей вектора ошибок от вектора управления.

Необходимо отметить, что предложенная модель универсальна и может использоваться для управления различными параметрами цифровых систем. При этом модель может описывать как систему в целом, так и каждый канал в отдельности, учитывая его нестационарность и ошибки. Распределения вероятностей векторов системы меняются на каждом шаге в соответствии с матрицами переходных вероятностей Π_A, Π_B, Π_Γ.

УДК 621.396.946 (075)

Евразийский национальный университет им. Л. Гумилева, г. Астана

Поступила 10.09.07г.

А. М. БРЕНЕР, А. ЛЕСБАЕВ, М. А. СЕРИМБЕТОВ

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В КОНДЕНСАТНЫХ ПЛЕНКАХ

Проблема теоретического описания волновых процессов в конденсатных пленках [1, 2] далеко не исчерпана, что объясняется большим разнообразием проявлений эффектов нелинейности и дисперсии при волновых движениях пленок, особенно в процессах, сопровождающихся тепло и массообменом, а также фазовыми переходами. В этих процессах ситуация существенно усложняется в результате наличия источников тепла и массы, сильной неизотермичности и, соответственно, вследствие этих факторов, переменности физических свойств среды: вязкости, плотности, поверхностного натяжения и т.д.

Ранее было показано, что при стекании пленки конденсата может возникнуть ситуация, когда стационарная задача Нуссельта не имеет решения, и можно предполагать возможность генерации нелинейных волн в областях больших градиентов температуры и вязкости [3]. Сложность анализа волновых решений в случае пленочной конденсации заключается в том, что при наличии источника массы расход пленки возрастает. В настоящей работе предложены некоторые подходы к теоретическому описанию этой проблемы.

Для осуществления такого анализа получим прежде всего методом интегральных соотношений базовую систему уравнений для толщины пленки и расхода при пленочной конденсации. Уравнения движения и неразрывности в длинноволновом приближении [3] :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial U}{\partial y}\right) + g_{ef} + \frac{\sigma}{\rho}\frac{dK_S}{dx}, \qquad (1)$$

Граничные условия

$$y = 0 \Rightarrow U = V = 0, \; y = h \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = 0. \qquad (2)$$

Уравнение материального баланса конденсата

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial j}{\partial x}=I_m\varphi, \qquad (3)$$

где для источника массы справедливо:

$$I_{m,(con)}=\frac{\lambda}{r\rho}\frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y=h}. \qquad (4)$$

Интегрируя уравнение движения по толщине, после ряда преобразований получаем

$$\frac{\partial j}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^h U^2dy-U_S\left(\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial j}{\partial x}\right)=$$

$$=-\nu_w\frac{\partial U}{\partial y}\bigg|_{y=0}+g_{ef}\,h+\frac{\sigma h}{\rho}\frac{dK_S}{dx}. \qquad (5)$$

Используем гипотезу автомодельности, т.е. будем записывать профиль скорости по толщине пленки в виде

$$U=U_S f(\eta),\ \ \eta=\frac{y}{h},\ \ f(1)=1. \qquad (6)$$

Тогда последнее уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial j}{\partial t}+\frac{f_2}{f_1^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{j^2}{h}\right)-\frac{jI_m}{hf_1}=-\nu_w\frac{f_3}{f_1}\frac{j}{h^2}+g_{ef}h+\frac{\sigma h}{\rho}\frac{dK_S}{dx}, \qquad (7)$$

где

$$\int_0^1 fd\eta=f_1;\ \ \int_0^1 f^2d\eta=f_2;\ \ \frac{\partial f}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=0}=f_3. \qquad (8)$$

Полученные уравнения образуют базовую систему для толщины пленки и расхода. Если температура опорной поверхности не постоянна, то необходимо включить в выражение для автомодельного профиля скорости зависимость от толщины пленки, как от параметра, т.е.:

$$U=U_S f(\eta,x;h). \qquad (9)$$

Тогда получаем общий вид эволюционного уравнения

$$\frac{\partial j}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_2}{f_1^2}\frac{j^2}{h}\right)+\frac{j}{f_1h^2}\left(f_3\nu_w-I_mh\right)=$$

$$=g_{ef}h+\frac{\sigma h}{\rho}\frac{dK_S}{dx}. \qquad (10)$$

На достаточном удалении от начальной точки интенсивность источника массы при пленочной конденсации, как правило, невелика. Это дает возможность ввести в рассмотрение малый параметр $\varepsilon=\lambda\Delta T/r\rho\langle j_0\rangle$, где $\langle j_0\rangle$ – усредненный расход конденсата в невозмущенной пленке на рассматриваемом участке. Дополнительное оправдание такой подход получает вследствие больших величин теплот фазового перехода. Тогда справедливо балансовое соотношение

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial j}{\partial x}=\varepsilon\frac{\langle j_0\rangle}{h}. \qquad (11)$$

Кроме того, появляется возможность ввести растянутые медленные переменные $\tau=\varepsilon t$ и $z=\varepsilon x$ и быструю фазовую переменную $\eta=\theta(z,\tau)/\varepsilon$.

Тогда система базовых уравнений преобразуется к виду:

$$\varepsilon\frac{\partial j}{\partial\tau}+\varepsilon A\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{j^2}{h}\right)+\left(B+\varepsilon B_1\right)\frac{j}{h^2}=g_{ef}h+\varepsilon^3K_1h\frac{\partial^3h}{\partial z^3}, \qquad (12)$$

$$\varepsilon\frac{\partial h}{\partial\tau}+\varepsilon\frac{\partial j}{\partial z}=\varepsilon\frac{\langle j_0\rangle}{h}, \qquad (13)$$

так как расход и толщина пленки являются функциями как медленных, так и быстрой координат, производные в базовых уравнениях раскрываются следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\equiv\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\frac{\partial}{\partial\eta},\ \ \frac{\partial}{\partial z}\equiv\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\eta}. \qquad (14)$$

Коэффициенты в полученных уравнениях раскрываются следующим образом:

$$A=\frac{f_2}{f_1^2},\ B=\frac{\nu_wf_3}{f_1},\ B_1=-\frac{\langle j_0\rangle}{f_1},\ K_1=\frac{\sigma}{\rho}. \qquad (15)$$

В итоге приходим к следующей системе эволюционных уравнений

$$\varepsilon\left(\frac{\partial j}{\partial\eta}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial j}{\partial\eta}\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\right)+\varepsilon A\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{j^2}{h}\right)+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{j^2}{h}\right)\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]+$$

$$+\left(B+\varepsilon B_1\right)\frac{j}{h^2}-g_{ef}h=$$

$$=\varepsilon^3K_1h\left[\frac{\partial^3h}{\partial z^3}+\frac{3}{\varepsilon}\frac{\partial^3h}{\partial z^2\partial\eta}\frac{\partial\theta}{\partial z}+\frac{3}{\varepsilon^2}\frac{\partial^3h}{\partial z\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2+\right.$$

$$\frac{3}{\varepsilon}\frac{\partial^2h}{\partial z\partial\eta}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}+\frac{3}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2h}{\partial\eta^2}\frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}+$$

$$\left.+\frac{1}{\varepsilon^3}\frac{\partial^3h}{\partial\eta^3}\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^3+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial h}{\partial\eta}\frac{\partial^3\theta}{\partial z^3}\right], \qquad (16)$$

$$\varepsilon\left[\frac{\partial h}{\partial\tau}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial h}{\partial\eta}\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\right]+\varepsilon\left[\frac{\partial j}{\partial z}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial j}{\partial\eta}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]=\varepsilon\frac{\rangle j_0\langle}{h}.$$

Будем искать решение базовой системы в виде разложений по степеням малого параметра

$$j=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i J_i(\tau,z,\eta)\Big|_{\eta=\theta/\varepsilon}+\varepsilon^{N+1}R_{1N}(\tau,z,\eta,\varepsilon), \quad (17)$$

$$h=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i H_i(\tau,z,\eta)\Big|_{\eta=\theta/\varepsilon}+\varepsilon^{N+1}R_{2N}(\tau,z,\eta,\varepsilon). \quad (18)$$

В нулевом порядке получаем систему

$$\varepsilon^0\to\begin{cases}\dfrac{\partial\theta}{\partial\tau}\dfrac{\partial J_0}{\partial\eta}+A\dfrac{\partial\theta}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\dfrac{J_0^2}{H_0}\right)+B\dfrac{J_0}{H_0^2}= \\ g_{ef}H_0+K_1\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial z}\right)^3H_0\dfrac{\partial^3H_0}{\partial\eta^3}, \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial\tau}\dfrac{\partial H_0}{\partial\eta}+\dfrac{\partial\theta}{\partial z}\dfrac{\partial J_0}{\partial\eta}=0.\end{cases} \quad (19)$$

В первом порядке система выглядит следующим образом:

$$\varepsilon^1\to \quad (20)$$

$$\to\begin{cases}\varepsilon^1\to\left\{\dfrac{\partial\theta}{\partial\tau}\dfrac{\partial J_1}{\partial\eta}+A\dfrac{\partial\theta}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\dfrac{2J_0}{H_0}-J_1\right)-\right. \\ -A\dfrac{\partial\theta}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\dfrac{J_0^2}{H_0^2}-H_1\right)+B\dfrac{J_1}{H_0^2}- \\ -2B\dfrac{J_0}{H_0^3}H_1-g_{ef}H_1-K_1H_0\dfrac{\partial^3H_1}{\partial\eta^3}\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial z}\right)^3+ \\ +K_1H_1\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial z}\right)^3\dfrac{\partial^3H_0}{\partial\eta^3}\quad -A\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{J_0^2}{H_0}\right)-B_1\dfrac{J_0}{H_0^2}+ \\ +3K_1H_0\dfrac{\partial^3H_0}{\partial z\partial\eta^2}\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2+3K_1H_0\dfrac{\partial^2H_0}{\partial\eta^2}\dfrac{\partial\theta}{\partial z}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial z^2}, \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial\tau}\dfrac{\partial H_1}{\partial\eta}+\dfrac{\partial\theta}{\partial z}\dfrac{\partial J_1}{\partial\eta}\quad\dfrac{(j_0(}{H_0}-\dfrac{\partial H_0}{\partial\tau}-\dfrac{\partial J_0}{\partial z}.\end{cases}$$

Далее последовательно получаем рекуррентные соотношения для следующих порядков разложения. Отметим, что все системы, кроме первой, являются линейными относительно искомых функций и расцепляемы. Причем, в отличие от [4], системы расцепляются без дополнительного предположения о постоянстве фазовой скорости.

Из соотношения (19) следует

$$J_0=-\frac{\partial\theta/\partial\tau}{\partial\theta/\partial z}H_0+\Psi(\tau,z). \quad (21)$$

Так как из физического смысла рассматриваемой задачи $\Psi(\tau,z)=0$, то получаем уравнение для H_0

$$\frac{(\partial\theta/\partial\tau)^2}{\partial\theta/\partial z}(A-1)\frac{\partial H_0}{\partial\eta}-K_1\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^3H_0\frac{\partial^3H_0}{\partial\eta^3}= = g_{ef}H_0+\frac{\partial\theta/\partial\tau}{\partial\theta/\partial z}\frac{B}{H_0}. \quad (22)$$

Аналогично расцепляются системы для последующих приближений. Причем между расходами и толщинами как функциями быстрых и медленных переменных существует квазилинейная связь

$$J_i=-\frac{\partial\theta/\partial\tau}{\partial\theta/\partial z}H_i+\mathrm{F}(H_{i-1},J_{i-1};\tau,z). \quad (23)$$

Отсюда видно, что вклад градиента поверхностного давления, обусловленный переменной кривизной пленки и отвечающий за дисперсию волн, проявляет себя как диспергирующий фактор только в нулевом порядке. Волны более высоких порядков эволюционируют, но не являются, строго говоря, диспергирующими.

Коэффициент K_1 может иметь порядок ε или ε^2, в зависимости от рода жидкости. Поэтому для оценки влияния поверхностного натяжения представим решение (23) в виде $H = H_{01} + H_{02}$, где H_{02} – поправка, учитывающая влияние поверхностного натяжения. Причем справедливо неравенство $H_{02} << H_{01}$. Тогда для H_{01} получаем уравнение

$$\frac{(\partial\theta/\partial\tau)^2}{\partial\theta/\partial z}(A-1)\frac{\partial H_{01}}{\partial\eta}=\frac{gH_{01}^2+B(\partial\theta/\partial\tau)/(\partial\theta/\partial z)}{H_{01}}. \quad (24)$$

Полученное уравнение имеет очевидное решение типа бегущей волны

$$H_{01}=\sqrt{\left(H_{02}^2(\eta_0)+S_1\right)\exp\left(2gS_2(\eta-\eta_0)\right)-S_1}, \quad (25)$$

где

$$S_1=\frac{B(\partial\theta/\partial\tau)}{g(\partial\theta/\partial z)},\ S_2=\frac{(\partial\theta/\partial z)}{(\partial\theta/\partial\tau)^2(A-1)}.$$

Отбрасывая члены второго и более высоких порядков малости относительно поправки H_{02}, получаем уравнение

$$\frac{(\partial\theta/\partial\tau)^2}{\partial\theta/\partial z}(A-1)\frac{\partial H_{01}}{\partial\eta}=$$

$$=H_{02}\left[g-\frac{B(\partial\theta/\partial\tau)/(\partial\theta/\partial z)}{H_{01}^2}\right]+$$

$$+K\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^3 H_{01}\frac{\partial^3 H_{01}}{\partial\eta^3}+K\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^3 H_{01}\frac{\partial^3 H_{02}}{\partial\eta^3}. \quad (26)$$

Если отбросить первое слагаемое в правой части, как имеющее более высокий порядок малости, чем остальные, получим однородное уравнение. Легко проверить, что вронскиан этого однородного уравнения равен нулю, поскольку отсутствует вторая производная $\partial^2 H_{02}/\partial\eta^2$. Отсюда следует, что порядок полученного уравнения не может быть понижен до первого, и оно не содержит монотонно растущих решений. Для возможности появления осциллирующих решений, например, в виде искажения профиля волны типа ряби, необходимо выполнение условия

$$(A-1)\frac{\partial\theta}{\partial z}<0. \quad (27)$$

Последнее неравенство интересно тем, что связывает интегральные характеристики профиля скорости в пленке, зависящие от температурного поля по толщине пленки, и волновое число несущей волны. Если неравенство (27) не выполняется, то можно ожидать, что малое возмущение профиля несущей волны будет сглаживаться капиллярными силами. Для положительных волновых чисел последнее неравенство приводит к условию $A < 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ташимов Л.Т.* Моделирование нелинейных волн в пленках конденсата // Наука и образование Южного Казахстана. Шымкент: ЮКГУ, 1997. № 8. С. 70-73.

2. *Benjamin T.B.* Wave formation laminar flow down an inclined plane // J. Fluid Mech. 1957. V. 2, pt. 6. P. 554-574.

3. *Радев К.Б.* Влияние волн на тепломассообмен при пленочной конденсации // Препринт. 1989. №9. ИТМО им. А. В. Лыкова АН БССР. С.16.

4. *Taniuti T., Wei C.C.* Reductive perturbation method in non-linear wave propagation // Int. Jour. Phys. Soc. Japan, 1968. v. 241. P. 941.

Резюме

Интегралдық қатынастар әдісі бойынша пленка қалыңдығына және пленкалы конденсациялау кезіндегі шығындарға арналған базалық теңдеулер жүйесі алынды. Ұзын толқынды жуықтаулар арқылы конденсатты пленкалардағы эволюциялы толқындық теңдеулер шығарылды. Асимптоталық талдау көмегімен нөлінші және бірінші ретті жуықтық-аналитикалық шешімдер алынды.

Summary

On base of the integral correlations method the main system for film thickness and consumption has been obtained. By the long-wave approximation the evolution equations for the waves in condensate films have been derived. Using the asymptotic analysis the approximately – analytic solutions of the first and second orders have been obtained.

УДК 513.83

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, г. Шымкент

Поступила 10.11.07г.