А. Т. БАЙМАНКУЛОВ

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ДИФФУЗИОННОСТИ ГРУНТА

Движение воды в капиллярно-пористых средах, к которым относятся почвы, может происходить под воздействием самых разнообразных движущих сил, представляющих градиент давления, потенциала градиентного поля, потенциала электрического поля, температуры, концентрации растворенных веществ. Почвенная влага движется под действием объемных сил, поверхностные и граничные эффекты здесь не играют роли [1]. Поэтому, принимая во внимание и решая относительно простую задачу, предполагающую:

1) отсутствие электрического поля;

2) изотермию вдоль потока;

3) постоянство концентрации растворимых веществ движение влаги в почве можно описать нелинейным уравнением [1]

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(D(W)\frac{\partial W}{\partial z}\right). \qquad (1)$$

Здесь W – влажность, д. ед.; z – глубина; t – время; $D(W)$ – коэффициент диффузионности. Уравнение это получено на основе анализа механизма диффузии в пористом массиве, когда учитывается возникновение потоков влаги под действием градиента капиллярного давления. Диффузионная модель, предполагающая, что если в начальный момент задана неравномерная влажность, то должен возникнуть поток влаги из более влажных в менее влажные слои, что часто не оправдывается. Прямые, достаточно убедительные и многократно выполненные опыты демонстрируют иногда обратный знак потока от слоев с малым к слоям с большим влагосодержанием [2–4]. Эти факты входит в противоречие с законом Дарси, лежащим в основе диффузионной теории. Для того чтобы сохранить закон Дарси и в то же время объяснить наличие потоков против потенциала влажности, сделан ряд тщетных попыток, в частности, в отношении перехода от линейного к нелинейному уравнению диффузии [1]. Как выяснилось, действительное объяснение опытных фактов и правильное истолкование того, когда и при каких условиях происходит движение влаги в прямом и обратном направлении, возможно на основе модифицированного уравнения диффузии [2]

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(D(W)\frac{\partial W}{\partial z}+A\frac{\partial^2 W}{\partial t\partial z}\right). \qquad (2)$$

Решению этого уравнения при различных краевых условиях и с помощью различных методов посвящены работы [3, 5, 6]. Чтобы решить уравнение (2), необходимо сформулировать начальные и граничные условия. В самом простом варианте ими будут:

1) заданный в начальный момент глубинный ход влажности

$$W(z,0)=\varphi(z)\,,\quad t=0 \qquad (3)$$

2) изоляция в смысле обмена влагой между некоторым верхним слоем почвы H и ее нижними слоями, т.е.

$$\frac{\partial W(0,t)}{\partial z}=0\,,\quad z=0 \qquad (4)$$

3) заданная скорость расхода влаги

$$\frac{dB(t)}{dt}=f(t)\,, \qquad (5)$$

где $B(t)$ – влагосодержание в момент времени t, приходящееся на весь слой $0-H$, т.е.

$$B(t)=\int_0^H W(z,t)dz\,.$$

4) Подставляя его в проинтегрированное в пределах от 0 до H уравнение (2), получим

$$-\left(D(W)\frac{\partial W}{\partial z}+A\frac{\partial^2 W}{\partial t\partial z}\right)\Bigg|_{z=H}=f(t)\,. \qquad (6)$$

Соотношение (6) выражает поток влаги с поверхности почвы, т.е., по существу, величину испарения, что наглядно видно, когда мы, вместо модифицированного уравнения влагопереноса, переходим к каноническому уравнению диффузию (1), предполагающему $A = 0$.

В настоящей работе изучается нахождение коэффициента диффузионности $D(W)$. Для этого необходимо задаваться еще одним дополнительным условием, а именно, изменением влаги на поверхности земли в течение определенного времени T, т.е.

$$W\big|_{t=0} = F(t)\,. \qquad (7)$$

Коэффициент диффузионности $D(W)$ определяется итеративно. Предполагая, что система (1)–(7) справедлива для последовательных приближений $D_n(W)$, $D_{n+1}(W)$ и рассуждая также, как в работе [7], получаем сопряженную задачу:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(D(W)\frac{\partial\psi}{\partial z} - A\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial z}\right) = 0\,, \qquad (8)$$

$$\psi(z,T) = 0\,,\ \left.\left(D(W)\frac{\partial\psi}{\partial z} - A\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial z}\right)\right|_{z=0} = 0\,, \ (9)$$

$$\left.\left(D(W)\frac{\partial\psi}{\partial z} - A\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial z}\right)\right|_{z=H} = 2\left(W\big|_{z=H} - F(t)\right). \ (11)$$

При этом выводится следующая формула:

$$2\int_0^T\left(\overset{n+1}{W}\Big|_{z=H} - F(t)\right)\delta W dt =$$

$$= -\int_0^T\int_0^H \delta D\frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}dtdz\,. \qquad (12)$$

Здесь $\delta W = \overset{n+1}{W} - \overset{n}{W}$, $\delta D = D_{n+1}(W) - D_n(W)$. Задавая $D_n(W)$ следующее приближение, $D_{n+1}(W)$ определяется из минимума функционала

$$J(D) = \int_0^T\left(\overset{n+1}{W}\Big|_{z=H} - F(t)\right)^2 dt\,.$$

Тогда с учетом (12) имеем формулу

$$J(D_{n+1}) - J(D_n) =$$

$$= -\int_0^T\int_0^H \delta D\frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}dtdz - \int_0^T(\partial W)^2\Big|_{z=H}dt\,.$$

Если

$$D_{n+1} = D_n + \beta_n\frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\,,$$

то

$$J(D_{n+1}) - J(D_n) =$$

$$= -\int_0^T\int_0^H \beta_n\left(\frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 dzdt - \int_0^T(\delta W)^2\Big|_{z=H}dt\,,$$

то есть построена минимизирующая последовательность такой, что

$$J(D_0) \geq J(D_1) \geq \ldots \geq J(D_n) \geq \ldots$$

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Для решения задачи (1)-(6) справедлива оценка

$$\|W\|^2 + A\left\|\frac{\partial W}{\partial z}\right\|^2 + 2\int_0^T\left\|\sqrt{D(W)}\frac{\partial W}{\partial z}\right\|^2 d\tau \leq$$

$$\leq C_1\left(\|W_0\|^2 + A\left\|\frac{\partial W_0}{\partial z}\right\|^2 + \int_0^T f^2(\tau)d\tau\right),$$

$$\max_t\max_z|W| \leq C_2 < \infty\,.$$

Теорема 2. Решение задачи (1)–(6) является устойчивым по $f(t)$ и $W_0(z)$, т.е. справедлива оценка

$$\left\|W - \widetilde{W}\right\|^2 + A\left\|\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial\widetilde{W}}{\partial z}\right\|^2 +$$

$$+ 2\int_0^T\left\|\sqrt{D(W)}\left(\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial\widetilde{W}}{\partial z}\right)\right\|^2 d\tau \leq$$

$$\leq C_3\left(\left\|W_0 - \widetilde{W}_0\right\|^2 + A\left\|\frac{\partial W_0}{\partial z} - \frac{\partial\widetilde{W}_0}{\partial z}\right\|^2 + \right.$$

$$\left. + \int_0^T\left|f(\tau) - \widetilde{f}(\tau)\right|^2 d\tau\right).$$

Здесь $\widetilde{W}$ – решение возмущенной задачи.

Теорема 3. Для решения задачи (8)–(11) справедлива оценка

$$\|\psi\|^2 + A\left\|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right\|^2 + 2\int_0^T\left\|\sqrt{D(W)}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right\|^2 d\tau \leq$$

$$\leq C_4\int_t^T\left(W\big|_{z=H} - F(\tau)\right)^2 d\tau\,.$$

Теорема 4. Решение задачи (8)–(11) является устойчивым по $f(t)$, $F(t)$ и $W_0(z)$, т.е. справедлива оценка

$$\left\|\psi-\tilde{\psi}\right\|^2+A\left\|\frac{\partial\psi}{\partial z}-\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial z}\right\|^2+$$

$$+2\int_t^T\left\|\sqrt{D(W)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}-\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial z}\right)\right\|^2d\tau\le$$

$$\le C_5\left(\left\|W_0-\tilde{W}_0\right\|^2+A\left\|\frac{\partial W_0}{\partial z}-\frac{\partial\tilde{W}_0}{\partial z}\right\|^2+\right.$$

$$\left.+\int_t^T\left|f(\tau)-\tilde{f}(\tau)\right|^2d\tau+\int_t^T\left|F(\tau)-\tilde{F}(\tau)\right|^2d\tau\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чудновский А.Ф.* Теплофизика почвы. – М.: Наука, 1976, 352 с.

2. *Hallaire.* L'eau et la productions vegetable. Institute National de la Recherche Agronomique. 1964.№ 9.

3. *Нерпин С.В., Юзефович Г.И.* О расчете нестационарного движения влаги в почве// Докл. ВАСХНИЛ. 1966. № 6.

4. *Бондаренко И.Ф.* и др. Расчетные методы прогноза водного режима и его регулирование. // М.: В сб.: Физика, химия, биология и минералогия почв СССР. 1964.

5. *Юзефович Г.И., Янгарбер В.А.* Исследование нелинейного уравнения влагопереноса. // Л.: Колос. Сб. трудов по агрофизике. Вып. № 14. 1967.

6. *Янгарбер В.А.* Сеточная схема для решения модифицированного уравнения влагопереноса // М.: Докл. ВАСХНИЛ. 1966. № 8.

7. *Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т., Маханбетова Г.И.* Обратная задача кондуктивного распространения тепла в однородной среде // Вестник НАН РК. 2008. №1. С. 11-13.

Резюме

Топырақтаңы ылңал мөлшерінің өзгеру процесінің математикалық моделі қарастырылады. Топырақтың диффузиялық коэффициентін табатын итерациялық тәсіл құрылып, тура және кері есептің орнықтылыңы дәлелденеді.

Summary

This work considers mathematical model of distribution of moisture in a soil. The iterative method was developed for definition the coefficient of diffusion soils, and stability of the solution of the direct and interfaced problem was proved.

Поступила 10.01.09г.

А. Т. БАЙМАНКУЛОВ, Г. И. МАХАНБЕТОВА

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МНОГОСЛОЙНОГО ГРУНТА

Экспериментальное и численное определение коэффициента теплопроводности является самостоятельной задачей современной теории геокриологии. Проблемы и теоретические основы кондуктивного распространения тепла описаны в основополагающих работах [1, 2]. В работах [3, 4] было изучено распространение тепла и влаги в многослойных грунтах, а в работах [5, 6] теоретические вопросы определения коэффициента теплопроводности грунта. В настоящей работе описан алгоритм, с помощью которого определяется коэффициент теплопроводности однородного грунта.

1. Постановка задачи. В области $Q=(0,H)\times(0,T)$, $z\in(0,H)$, $t\in(0,T)$ изучается задача

$$\gamma_0 C\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\right), \tag{1}$$

$$\theta\big|_{z=0}=T_1,$$

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\Big|_{z=H}+\alpha(\theta_1(t)-T_b)\Big|_{z=H}=0, \tag{2}$$

$$\theta\big|_{t=0}=\theta_0(z), \quad 0\le z\le H. \tag{3}$$