Т. Б. АКИШЕВ, Б. РЫСБАЙУЛЫ

ОДИН ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОЕМКОСТИ НЕОДНОРОДНОГО ГРУНТА

На практике часто сталкиваются с проблемой определения теплофизических характеристик грунтов, таких как коэффициент теплопроводности, коэффициент теплоемкости, удельный вес грунта. В настоящее время существуют многочисленные приборы для определения вышеперечисленных характеристик грунта. Все эти приборы работают по одному принципу, а именно берется проба изучаемого грунта, пробе придается определенная правильная форма (шар, цилиндр, параллелепипед), после этого определяются числовые значения характеристики грунта [1]. Чтобы определить геологический состав интересующего нас участка земли, мы должны взять пробу по глубине земли, что не всегда удается, так как для этого требуется определенная сумма денег и труд работа час. Поэтому создание прибора, предназначенного для определения состава грунта и приспособленного для работы в полевых условиях, является актуальной задачей. Известно, что работа всех выше указанных приборов ориентирована на решение обратной задачи уравнений теплопроводности. В настоящей работе приводится метод, отличающийся от других тем, что с помощью данного метода определяются характеристики грунта, не извлекая пробу грунтов земляного участка. Обратные задачи теплообмена изучены в монографии [2], а решение обобщенной задачи Стефана изучено в работах [3–5].

1.1. Постановка задачи. В области $Q=(0,H)\times(0,T)$ изучается кондуктивное распространение тепла

$$\gamma_0 c\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\right), \tag{1}$$

$$\theta\big|_{z=0}=T_1, \tag{2}$$

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\bigg|_{z=H}+\alpha(\theta\big|_{z=H}-T_b)=0, \tag{3}$$

$$\theta\big|_{t=0}=\theta_0(z),\quad 0\le z\le H, \tag{4}$$

$$\theta\big|_{z=H}=T_g(t),\quad 0\le t\le T, \tag{5}$$

$$\theta\big|_{z_k+0}=\theta\big|_{z_k-0},\quad \lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\bigg|_{z_k+0}=\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\bigg|_{z_k-0}. \tag{6}$$

Требуется определить коэффициент теплоемкости c итеративным методом. В работе рассматривается случай, когда $c(z)$-кусочно-постоянная функция. Сначала задается начальное приближение $c_n(z)$ и решается приближенная задача

$$\gamma_0 c_n \overset{n,j+1}{Y}_{i,\bar t}=\left(\lambda \overset{n,j+1}{Y}_{i,z}\right)_{\bar z}, \tag{7}$$

$$\overset{n,j+1}{Y}_0=T_1,\quad \lambda \overset{n,j+1}{Y}_{N,\bar z}+\alpha\left(\overset{n,j+1}{Y}_N-T_b\right)=0, \tag{8}$$

$$\overset{n,0}{Y}_i=\theta_0(z_i),\quad z_i=i*h;\quad i=0,1,\dots,N, \tag{9}$$

где $\overset{n,j+1}{Y}_i$ – разностный аналог температуры $\theta(z_i,t_{j+1})$, $z_i=i*h$; $t_{j+1}=(j+1)\Delta t$, причем $h=\dfrac{H}{N}$, $\Delta t=\dfrac{T}{m}$ соответственно шаги по пространственным координатам и по времени. В дальнейшем будем пользоваться обозначениями $\overset{n,j+1}{Y}_i=Y$, $\overset{n,j}{Y}_i=\overline{Y}$. Задача (7)-(9) изучается в сеточной области

$$Q_N^m=\left\{z_i=i*h;\ t_j=j*\Delta t;\ i=0,1,2,\dots,N;\ j=0,1,2,\dots,m\right\}.$$

Следующее приближение c_{n+1} будем определять из минимума функционала

$$J(c_n)=\sum_{j=1}^{m}\left(\overset{n,j}{Y}_N-T_g(t_j)\right)^2\Delta t.$$

Предполагаем, что для коэффициента c_{n+1} справедлива система (7)-(9):

$$\gamma_0 c_{n+1} \overset{n+1,j+1}{Y_{i,\bar t}} = \left(\lambda \overset{n+1,j+1}{Y_{i,z}}\right)_{\bar z},$$

$$\overset{n+1,j+1}{Y_0} = T_1, \quad \lambda \overset{n+1,j+1}{Y_{N,\bar z}} + \alpha\left(\overset{n+1,j+1}{Y_N} - T_b\right) = 0,$$

$$\overset{n+1,0}{Y_i} = \theta_0(z_i), \quad z_i = i * h; \quad i = 0,1,...,N.$$

Обозначим

$$\overset{n+1,j+1}{Y_i} - \overset{n,j+1}{Y_i} = \Delta Y_i^{j+1}, \quad c_{n+1} - c_n = \Delta c,$$

тогда

$$\gamma_0 c_n \Delta Y_{\bar t} + \gamma_0 \Delta c \overset{n+1}{Y_{\bar t}} = \left(\lambda \Delta Y_z\right)_{\bar z}. \tag{10}$$

Начально-граничные условия для уравнений (9) записываются в виде:

$$\Delta Y_0 = 0, \quad \Delta Y_N = 0, \quad \lambda \Delta Y_{N,\bar z}\Big| = 0, \tag{11}$$

$$\Delta Y^0 = 0. \tag{12}$$

1.2. Решение задачи. Умножим (10) на $\psi_i^j\, dzdt$ и просуммируем по i и j по всем внутренним узлам сетки в области Q_N^m. Тогда

$$\gamma_0 \sum_{i,j} \Delta c \overset{n}{Y_{\bar t}} \psi dtdh + \gamma_0 \sum_{i,j} c_n \Delta Y_{\bar t} \psi_j dtdh =$$

$$= \sum_{i,j} \left(\lambda \Delta Y_z\right)_{\bar z} \psi dtdh.$$

Применяя формулу суммирования по частям, получим:

$$-\frac{1}{c_n} \sum_{i,j} \Delta c \left(\lambda \overset{n}{Y_z}\right)_{\bar z} \psi \Delta h \Delta z +$$

$$+ \gamma_0 c_n \sum_i \left(\Delta Y \psi\right)\Big|_{j=0}^{j=m} \Delta z - \gamma_0 c \sum_{i,j} \Delta Y \psi_{\bar t} \Delta t \Delta z =$$

$$= \sum_j \left(\lambda \Delta Y_z\right)\Big|_{i=0}^{i=N-1} \Delta t - \sum_{i,j} \lambda \Delta Y_z \psi_z \Delta t \Delta z. \tag{13}$$

Предполагая, что

$$\psi_i^m = 0, \quad \psi_0^j = 0$$

из (13) получим

$$-\frac{1}{c_n} \sum_j \Delta c \left(\lambda \overset{n}{Y} \psi\right)_{i=N} \Delta t +$$

$$+ \frac{1}{c_n} \sum_{i,j} \Delta c \lambda \overset{n}{Y_z} \psi_z \Delta t \Delta z - \gamma_0 c \sum_{i,j} \Delta Y \psi_{\bar t} \Delta t \Delta z =$$

$$= -\sum_{i,j} \lambda \Delta Y_z \psi_z \Delta t \Delta z.$$

Еще раз, применяя формулу интегрирования по частям, имеем

$$-\frac{\Delta c}{c_n} \sum_j \Delta t \left(\lambda \overset{n}{Y_z} \psi\right)\Big|_{i=N-1} +$$

$$+ \frac{\Delta c}{c_n} \sum_{i,j} \lambda \overset{n}{Y_z} \psi_z \Delta t \Delta z - \gamma_0 c \sum_{i,j} \Delta Y \psi_{\bar t} \Delta t \Delta z =$$

$$= \sum_{i,j} \Delta Y \left(\lambda \psi_z\right)_{\bar z} \Delta t \Delta z - \sum_j \left(\lambda \psi_z \Delta Y\right)\Big|_{i=0}^{i=N-1} \Delta t. \tag{14}$$

Если предположить, что

$$\gamma_0 c_n \psi_{\bar t}^j + \left(\lambda \psi_z^j\right)_{\bar z} = 0,$$

и

$$\lambda \psi_z\Big|_{i=N-1} = -2\left(Y_N - T_g(t)\right),$$

то из (14) получится равенство

$$2\sum_j \Delta Y \left(Y_N - T_g\right) dt = \tag{15}$$

$$\frac{\Delta c}{c_n} \sum_j \Delta t \alpha \left(T_g^j - T_b^j\right) \psi\Big|_{i=N} + \frac{\Delta c}{c_n} \sum_{i,j} \lambda \overset{n}{Y_z} \psi_z \Delta t \Delta z.$$

Вычислим приращение функционала

$$J(c + \Delta c) - J(c) =$$

$$= \sum_j \Delta t \left(\overset{n+1}{Y} - T_g\right)^2 - \sum_j \left(\overset{n}{Y} - T_g\right)^2 \Delta t.$$

Преобразуя, получим

$$J(c + \Delta c) - J(c) =$$

$$= 2\sum_j \Delta Y \left(\overset{n}{Y} - T_g\right) \Delta t - \sum_j \left(\Delta Y_N\right)^2 \Delta t.$$

Используя (15), выводим, что

$$J(c + \Delta c) - J(c) =$$

$$= \frac{\Delta c}{c_n} \sum_j \Delta t \alpha \left(T_g - T_b\right) \psi\Big|_{i=N} +$$

$$+ \frac{\Delta c}{c_n} \sum_{i,j} \lambda \overset{n}{Y_z} \psi_z \Delta t \Delta z - \sum_j \left(\Delta Y_N\right)^2 \Delta t.$$

Если

$$\frac{\Delta c}{c_n} =$$

$$= -\beta_n \left[\sum_j \Delta t \alpha \left(T_g - T_b\right) \psi\Big|_{i=N} + \sum_{i,j} \lambda \overset{n}{Y_z} \psi_z \Delta t \Delta z\right],$$

то

$$J(c+\Delta c)-J(c)=$$

$$=-\beta_n\left[\sum_j \Delta t\alpha\left(T_g-T_b\right)\psi\Big|_{i=N}+\sum_{i,j}\lambda \overset{n}{Y_z}\psi_z\Delta t\Delta z\right]^2-$$

$$-\sum_j\left(\Delta Y_N\right)^2\Delta t,$$

где β_n – достаточно малое положительное число подбирается в ходе итерационного процесса. Мы построили минимизирующюю последовательность

$$c_{n+1}-c_n=$$

$$=-c_n\beta_n\left[\sum_j \Delta t\alpha\left(T_g-T_b\right)\psi\Big|_{i=N}+\sum_{i,j}\lambda \overset{n}{Y_z}\psi_z\Delta t\Delta z\right],$$

причем

$$J(c_1)>J(c_2)>\ldots>J(c_n)\ldots$$

В ходе рассуждения получим сопряженную задачу:

$$\gamma_0 c_n\psi_{\bar t}^j+\left(\lambda\psi_z^j\right)_{\bar z}=0,$$

$$\psi_i^m=0,\ \psi_0^j=0,$$

$$\lambda\psi_z\Big|_{i=N-1}=-2\left(Y_N-T_g(t)\right).$$

1.3. Алгоритм решения задачи/

1) Задается начальное приближение $c_n(z)$.

2) Решается прямая задача

$$\gamma_0 c_n \overset{n,j+1}{Y_{i,\bar t}}=\left(\lambda \overset{n,j+1}{Y_{i,z}}\right)_{\bar z},$$

$$\overset{n,j+1}{Y_0}=T_1,\ \lambda \overset{n,j+1}{Y_{N,\bar z}}+\alpha\left(\overset{n,j+1}{Y_N}-T_b\right)=0,$$

$$\overset{n,0}{Y_i}=\theta_0(z_i),\quad z_i=i*h;\quad i=0,1,\ldots,N.$$

и определяется $\overset{n}{Y_z}$ и Y_n.

3) Решается сопряженная задача

$$\gamma_0 c_n\psi_{\bar t}^j+\left(\lambda\psi_z^j\right)_{\bar z}=0,$$

$$\psi_i^m=0,\ \psi_0^j=0,$$

$$\lambda\psi_z\Big|_{i=N-1}=-2\left(Y_N-T_g(t)\right)$$

и определяются ψ_z и ψ_N.

4) Следующее приближение коэффициента теплоемкости определяется по формуле:

$$c_{n+1}(z)=c_n(z)-$$

$$-c_n(z)\beta_n\left[\sum_j \Delta t\alpha\left(T_g-T_b\right)\psi\Big|_{i=N}+\sum_{i,j}\lambda \overset{n}{Y_z}\psi_z\Delta t\Delta z\right],$$

$$\beta_n>0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чудновский А.Ф.* Теплобмен в дисперсных средах. М.: Гостехиздат, 1954. 444 с.

2. *Алифанов О.М.* Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988. 279 с.

3. *Адамов А.А.* Процессы протаивания грунта // Доклады НАН РК. 2007. №1. С. 16-19.

4. *Жумагулов Б.Т., Рысбай?лы Б., Адамов А.А.* Сходимость разностной схемы для обобщенной задачи Стефана конвективного распространения влаги // Вестник НАН РК. 2007. №5. С. 30-41.

5. *Рысбайұлы Б., Адамов А.А.* Исследование изменений теплоемкости фазовой зоны в многослойном грунте // Доклады НАН РК. 2007. №4. С. 14-17.

Резюме

Көпқабатты ортамен жылу таралу есебі қарастырылған. Жер бетіндегі топырақ және ауа температурасын пайдалана отырып, жер астындағы топырақтың жылу сыйымдылық коэффициентін анықтауға болатын тәсіл құрастырылған.

Summary

This work considers the reciprocal sum of the heat distribution process in multilayer environment. Using the temperature, specified on the parts of the border, the coefficient of thermal conduction was finding. The iterative method was offered and it's convergence was proved.

Поступила 15.01.09г.