Б. РЫСБАЙУЛЫ, А.Т. БАЙМАНКУЛОВ

СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ДИФФУЗИИ ПОЧВЕННОЙ ВОДЫ

(Представлена академиком НАН РК Ж.Ж.Байгунчековым)

Изучается движение влаги в ненасыщенном грунте. Задается влага на поверхности земли. Чтобы определить коэффициент диффузии почвенной воды, необходимо решить прямую и сопряженную разностную задачу. Доказывается сходимость используемых разностных схем.

1. Постановка задачи.

В работе изучается система атмосфера - ненасыщенная зона - грунтовая вода. Движение воды в системе имеет непрерывный характер. Условия на границе подсистемы атмосфера и ненасыщенная зона, т.е. поверхность почвы, описывает движения воды в ненасыщенной зоне почвенного профиля.

Теория движения воды в почве при изотермических условиях для ненабухающих и недеформирующихся грунтов основана на законе Букингема [1], который выражает связь между потоком и градиентом потенциала переноса. Аналитическая запись закона Букингема записана в виде $q = -D\dfrac{\partial W}{\partial z} - K$ Ричардсоном [2] и Чайлосом [3].

Здесь - коэффициент диффузии влаги, q - удельный поток воды, K - коэффициент гидравлической проводимости почвы, W - влажность грунта. Уравнение неразрывности для ненасыщенного потока можно представить в виде [4]

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial W}{\partial z}\right) \qquad (1)$$

В начальный момент задается распределение влаги:

$$W(z,0) = W_0(z)$$

На границе поверхности почвы и атмосферы задается граничное условие второго рода

$$\frac{\partial W(H,t)}{\partial z} = A(t)$$

На границе грунтовых вод с почвой задается первое граничное условие

$$W(0,t) = W_1 = const$$

Чтобы найти $D(z)$, мы должны ставить дополнительное условие. В нашем случае это влага на поверхности почвы

$$W(H,t) = W_g(t),\ t \in [0,T]. \qquad (2)$$

Введем новую функцию $W(z,t) = \overline{W}(z,t) - W_1 - zA(t)$. Найдем производные и подставляем в (1). Функцию $\overline{W}(z,t)$ снова обозначим через $W(z,t)$. Тогда получится следующая задача:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial W}{\partial z}\right) - A(t)\frac{\partial D(z)}{\partial z} + f(z,t) \qquad (3)$$

$$W(0,t) = 0, \quad \frac{\partial W(H,t)}{\partial z} = 0,$$

$$W(z,0) = W_0(z) \qquad (4)$$

Задача (3)-(4) в области $Q = (0,H)\times(0,T)$ при заданном $D(z)$ имеет единственное устойчивое решение [5]. Методика решения обратной задачи кондуктивного распространения температуры разработана в работах [6, 7], а общая схема определения коэффициента диффузии на дифференциальном уровне изучена в работе [8]. В настоящей работе доказываются сходимость прямой и сопряженной, разностные задачи, полученные в процессе определения коэффициента диффузии $D(z)$ [9].

2. Разностные задачи.

В дискретной области $Q_N^m = \{z_i = i\cdot\Delta z,\ \mathrm{t_j} = j\cdot\Delta t \mid N\cdot\Delta z = H;\ \mathrm{m}\cdot\Delta \mathrm{t} = \mathrm{T}\}$

ищется решение задачи

$$Y_{\bar t}^{j+1}=\left(D(z_{i-1})Y_{\bar z}^{j+1}\right)_z+A^{j+1}D_{i,z}+\varphi_i^{j+1},$$
$$i=1,2,...,N;\ \mathrm{j}=0,1,...,\mathrm{m}-1. \quad (5)$$

$$Y_0^j=0,\ \mathrm{Y}_{\mathrm{N},\bar{\mathrm{z}}}^{\mathrm{j}}=0,\ \ \mathrm{Y}_{\mathrm{i}}^{0}=W_0(z_i) \quad (6)$$

В работе /9/ из (6)-(7) получена сопряженная задача

$$U_{\bar t}^{j+1}+\left(D_n(z_{i+1})U_{i,z}^{j}\right)_{\bar z}=0 \quad (7)$$

$$U_i^m=0,\quad U_0^j=0,$$

$$D_n(z_{N-1})U_{N,\bar z}^{j}=2\left(Y_N^{j+1}-U_g(t_{j=1})\right) \quad (8)$$

3.Сходимость схемы (5)-(6)

Интегрируем (3) по t от t_J до t_{J+1}, по z от z_i до z_{i+1}. Тогда

$$\frac{1}{\Delta z}\int_{z_i}^{z_{i+1}}\frac{W(\xi,t_{J+1})-W(\xi,t_J)}{\Delta t}d\xi=$$

$$=\frac{1}{\Delta t}\int_{t_J}^{t_{J+1}}\frac{\sigma(z_{i+1},\tau)-\sigma(z_i,\tau)}{\Delta z}d\tau+\frac{1}{\Delta t\Delta z}\int_{z_i}^{z_{i+1}}d\xi\int_{t_J}^{t_{J+1}}f(\xi,\tau)d\tau+$$

$$+\frac{1}{\Delta z}\left(D(z_{i+1})-D(z_i)\right)\frac{1}{\Delta t}\int_{t_j}^{t_{j+1}}A(\tau)d\tau, \quad (9)$$

где $\sigma(z,t)=D(z)\dfrac{\partial W(z,t)}{\partial z}$

Введем обозначения

$$\psi_1=\frac{1}{\Delta z}\int_{z_i}^{z_{i+1}}\frac{W(\xi,t_{J+1})-W(\xi,t_J)}{\Delta t}d\xi-W_{\bar t}$$

$$\psi_2=\frac{1}{\Delta t}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\sigma(z_i,\tau)d\tau-D(z_i)W_{\bar x} \quad (10)$$

$$\psi_3=f(z_i,t_j)-\frac{1}{\Delta t\Delta z}\int_{z_i}^{z_{i+1}}d\xi\int_{t_j}^{t_{j+1}}f(\xi,\tau)d\tau.$$

$$\psi_{4,z}=A^{j+1}D_{i,z}-\frac{1}{\Delta z}\left(D(z_{i+1})-D(z_i)\right)\frac{1}{\Delta t}\int_{t_j}^{t_{j+1}}A(\tau)d\tau$$

С учетом системы (10) перепишем (9) в виде

$$W_{\bar t}=\left(D(z_i)W_{\bar x}\right)_x+\psi_1+\psi_{2,x}+\psi_3+\psi_{4,z} \quad (11)$$

$$W_0^j=0,\quad W_{N,\bar x}^{j+1}=0$$

Из (11) и (5) для разности $\eta=W_i^{j+1}-Y_i^{j+1}$ получим систему

$$\eta_{\bar t}=\left(D(z_i)\eta_{\bar x}\right)_x+\psi_1+\psi_{2,x}+\psi_3+\psi_{4,z} \quad (12)$$

$$\eta_0^j=0,\quad \eta_{N,\bar x}^{j+1}=0,\quad \eta_i^0=0. \quad (13)$$

Преобразуем

$$\psi_1=\frac{1}{\Delta z}\int_{z_i}^{z_{i+1}}\left[W(z_i,t_{j+1})-W(\xi,t_{j+1})\right]_{\bar t}d\xi=$$

$$=\frac{1}{\Delta z}\int_{z_i}^{z_{i+1}}d\xi\int_{\xi}^{z_i}\left(\frac{\partial W(\nu,t_{j+1})}{\partial\nu}\right)_{\bar t}d\nu=$$

$$=\frac{1}{\Delta z\Delta t}\int_{z_i}^{z_{i+1}}d\xi\int_{\xi}^{z_i}d\nu\int_{t_j}^{t_{j+1}}\frac{\partial^2W(\nu,\tau)}{\partial\nu\partial\tau}d\tau$$

Из последнего равенства следует неравенство

$$|\psi_1|\le\frac{1}{\Delta t}\int_{z_i}^{z_{i+1}}d\xi\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left|\frac{\partial^2W(\xi,\tau)}{\partial\xi\partial\tau}\right|d\tau. \quad (14)$$

Аналогично

$$\psi_2=\frac{1}{\Delta t}D(z_{i-1})\left(\frac{\partial W(z_i,t)}{\partial\xi}-\frac{W(z_i,t)-U(z_{i-1},t)}{\Delta t}\right)=$$

$$=D(z_{i-1})\frac{1}{\Delta t\Delta z}\int_{z_i}^{z_{i+1}}\left(\frac{\partial W(z_i,t)}{\partial\xi}-\frac{\partial W(\xi,t)}{\partial\xi}\right)d\xi=$$

$$=D(z_{i-1})\frac{1}{\Delta t\Delta z}\int_{z_i}^{z_{i+1}}d\xi\int_{\xi}^{z_i}\frac{\partial^2W(\nu,t)}{\partial\xi\partial\nu}d\eta$$

Оценивая последнее равенство сверху, получаем, что

$$|\psi_2|\le D(z_i)\frac{1}{\Delta t}\int_{z_i}^{z_{i+1}}\left|\frac{\partial^2W(\xi,t)}{\partial\xi^2}\right|d\xi. \quad (15)$$

Оцениваем $\psi_{3.}$. Для этого проведем следующие преобразования:

$$\psi_3=f(z_i,t_j)-\frac{1}{\Delta t\Delta z}\int_{z_i}^{z_{i+1}}d\xi\int_{t_j}^{t_{j+1}}f(\xi,\tau)d\tau=$$

$$=\frac{1}{\Delta t\Delta z}\int_{z_i}^{z_{i+1}}d\xi\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left[f(z_i,t_j)-f(z_i,\tau)\right]d\tau+$$

$$+\frac{1}{\Delta t\Delta z}\int_{z_i}^{z_{i+1}}d\xi\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left[f(z_i,\tau)-f(\xi,\tau)\right]d\tau=$$

$$= \frac{1}{\Delta t \Delta z}\int_{z_i}^{z_{i+1}} d\xi \int_{t_j}^{t_{j+1}} d\tau \int_{\tau}^{t_j} \frac{\partial f(z_i,\nu)}{\partial \nu} d\nu +$$

$$+ \frac{1}{\Delta t \Delta z}\int_{z_i}^{z_{i+1}} d\xi \int_{\xi}^{z_i} d\nu \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\partial f(\nu,\tau)}{\partial \nu} d\tau$$

Оценивая его сверху, получаем

$$+|\psi_3| \le \frac{1}{\Delta z}\int_{z_i}^{z_{i+1}} d\xi \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left|\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial \xi}\right| d\tau + \frac{1}{\Delta t}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \left|\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial \tau}\right| d\tau \quad (16)$$

$$|\psi_4| = \left| D_i \left(A^{j+1} - \frac{1}{\Delta t}\int_{t_j}^{t_{j+1}} A(\tau) d\tau \right) \right| \le D_i \int_{t_j}^{t_{j+1}} |A'(\tau)| d\tau \quad (17)$$

Умножим (11) на $2\eta\Delta t\Delta z$ и просуммируем по i и j. После применения формулы суммирования по частям получим

$$\|\eta\|^2 + \sum_o 2\left\|\sqrt{D}\eta_{\bar{x}}\right\|^2 \Delta t = 2\sum_{i,j} \psi_{1,i}^{j+1} \eta_i^{j+1} \Delta t \Delta z -$$

$$-2\sum_{i,j}\left(\psi_{2,i}^{j+1} + \psi_{4,i}^{j+1}\right)\eta_{ix}^{j+1}\Delta t\Delta z + 2\sum_{i,j}\psi_{3,i}^{j+1}\eta_i^{j+1}\Delta t\Delta z.$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского и ε - неравенство Коши выводим

$$\|\eta\|^2 + \sum_j \left\|\sqrt{D}\eta_{\bar{x}}\right\|^2 \Delta t \le$$

$$\le C_1 \sum_j \left(\|\psi_1\|^2 + \|\psi_2\|^2 + \|\psi_3\|^2 + \|\psi_4\|^2 \right) \quad (18)$$

Из неравенств (14)-(17) получим следующие оценки

$$\sum_j \|\psi_1\|^2 \Delta t \le (\Delta z)^2 \int_0^H dz \int_0^T \left| \frac{\partial^2 W(z,t)}{\partial z \partial t} \right|^2 dt = (\Delta z)^2 \left\| \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial t} \right\|_{L_2(Q)},$$

$$\sum_j \|\psi_2\|^2 \le D(\Delta z)^2 \int_0^H dz 0 \int^T \left| \frac{\partial^2 W(z,t)}{\partial z^2} \right| dt = D(\Delta z)^2 \left\| \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right\|_{L_2(Q)},$$

$$\sum_j \|\psi_3\|^2 \Delta t \le 2(\Delta t)^2 \left\| \frac{\partial f}{\partial z} \right\|_{L_2(Q)} + 2(\Delta z)^2 \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|_{L_2(Q)},$$

$$\sum_j \|\psi_4\|^2 \Delta t \le (\Delta t)^2 \|A'\|_{L_2(0,T)}$$

Используя только что полученные неравенства, усиливаем (18). Тем самым окончательно выводится оценка сходимости:

$$\|\eta\|^2 + \sum_o \left\|\sqrt{D}\eta_{\bar{ч}}\right\|^2 \le C_2 \left[\left\| \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial t} \right\|_{L_2(Q)}^2 + \right.$$

$$\left. + \left\| \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right\|_{L_2(Q)}^2 + \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|_{L_2(Q)}^2 \right] (\Delta z)^2 +$$

$$+ C_3 (\Delta t)^2 \left(\left\| \frac{\partial f}{\partial z} \right\|_{L_2(Q)} + \|A'\|_{L_2(0,T)} \right) \quad (19)$$

Теорема. Если решение дифференциальной задачи (3)- (4) обладает свойствами: $W_{zt}, W_{zz}, f_t, f_z \in L_2(Q), A(t) \in W_2^1(0,T)$, то решение разностной задачи (5)- (6) сходится к решению дифференциальной задачи (3)- (4) при $\Delta z, \Delta t \to 0$. Причем справедлива оценка (19).

Аналогично доказывается сходимость сопряженной задачи (7)-(8).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Buckingham E.* Studies on movement of soil moisture. U. S. Dep. Agric. Bur. of Soils. (Washington), 1907, Bull. 38.

2. *Richards L.A.* Capillary conduction of liquids through medians. – Physics, 1931, vol, 1, p.318-333.

3. *Childs E.D.* The transport of water through heavy clay soils. I, III. – j.Ag. Sci., 1936, vol. 26.

4. *Нерпин С.В., Юзефович Г.И.* О расчете нестационарного движения влаги в почве// Докл. ВАСХНИЛ, №6, 1966.

5. *Тиханов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1996, 724 с.

6. *Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т., Махамбетова Г.И.* Обратная задача кондуктивного распространения тепла в однородной среде // Вестник НАН РК, 2008, №1, ст. 11-13.

7. *Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т., Исмаилов А.О.* Разностный метод определение коэффициента теплопроводности грунта в процессе промерзаний// Вестник НАН РК. 2008. -№2. - С. 7-9.

8. *Байманкулов А.Т.* Определение коэффициента диффузии почвенной воды в однородной среде // Вестник НАН РК. 2008. -№2. - С. 7-9.

9. *Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т.* Итерационный метод для определения коэффициента диффузии почвенной воды (в печати).

10. *Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т.* Устойчивость разностных схем прямой и сопряженной задачи для определения коэффициента диффузии почвенной воды.

Резюме

Қанықпаған топырақтағы ылғалдың қозғалысы қарастырылады. Жер бетіндегі ылғал беріледі. Топырақ суының диффузия коэффициентін анықтау үшін тура және түйіндес айырымдық сұлбалар шешілуі қажет. Осы сұлбалардың жинақтылығы дәлелденеді.

Summary

Is studied moisture movement in a nonsaturated ground. The moisture on an earth surface is set. To define factor of diffusion of soil water, it is necessary to solve direct and interfaced difference a problem. Convergence used difference schemes is proved.