У. А. ИСКАКОВА

О СИЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

(Представлена академиком НАН РК Т. Ш. Кальменовым)

В многомерном параллелепипеде методом спектрального разложения задачи Коши для уравнения Лапласа с отклоняющимся аргументом установлен критерий сильной разрешимости задачи Коши для уравнения Лапласа.

В области $\Omega = \{ (x,t) \mid x = (x_1, x_2, ..., x_n),$ $0 < x_i < \pi, i = 1,...,n,$ $0 < t < T\}$ рассматривается следующая задача

$$Lu = u_{tt} + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega; \quad (1)$$

$$u\big|_{x_i=0} = 0, \quad u\big|_{x_i=\pi} = 0, \quad i = 1, ..., n; \quad (2)$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \varphi_2(x). \quad (3)$$

Как известно, Ж.Адамаром [1] был построен пример, показывающий неустойчивость задачи (1)–(3) относительно малых изменений начальных данных. В работах [2, 3] и др. эта задача с помощью решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа сведена к интегральным уравнениям первого рода, даны различные регуляризации рассматриваемой задачи и установлена ее условная корректность. В настоящей работе методом спектрального разложения оператора Лапласа с отклоняющимся аргументом найден критерий сильной разрешимости смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа. В случае плоской области разрешимость смешанной задачи Коши и задачи Коши рассмотрены в работах [6, 7].

Определение 1. Функцию $u \in L_2(\Omega)$ назовем *сильным решением* смешанной задачи Коши (1)–(3), если существует последовательность функций $u_n \in C^2(\overline{\Omega})$, удовлетворяющих условиям

$$u\big|_{x_i=0} = 0, \quad u\big|_{x_i=\pi} = 0, \; i = 1, ..., n,$$

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0$$

и таких, что u_n и L_n сходятся в норме $L_2(\Omega)$ соответственно к u и f.

В дальнейшем важную роль играет следующая задача на собственные значения для уравнения Лапласа с отклоняющимся аргументом:

$$Lu = u_{tt}(x,t) + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}(x,t) = \lambda\, u(x, T - t),$$

$$(x,t) \in \Omega; \quad (4)$$

$$u\big|_{x_i=0} = 0, \quad u\big|_{x_i=\pi} = 0, \quad i = 1, ..., n; \quad (5)$$

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0. \quad (6)$$

Эквивалентная запись уравнения (4) имеет вид

$$LPu = P(u_{tt}(x,t) + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}(x,t)) = \lambda\, u(x,t),$$

где $Pu(x,t) = u(x, T - t)$.

Собственные функции задачи (4)–(6) ищем виде

$$u_{km}(x,t) =$$

$$= \sin k_1 x_1 \cdot \sin k_2 x_2 \cdot ... \cdot \sin k_n x_n \cdot v_{km}(t), \quad (7)$$

где $k = (k_1, k_2, ..., k_n)$ – мультиндекс, $k_i = 1,2,...$, $i = 1,...,n$. Тогда для определения $v_{km}(t)$ имеем следующую спектральную задачу для уравнения с отклоняющимся аргументом

$$v''_{km}(t) - |k|^2 v_{km}(t) = \lambda\, v_{km}(T - t), \; 0 < t < T; \quad (8)$$

$$v_{km}(0) = 0, \qquad v'_{km}(0) = 0, \quad (9)$$

где $|k|^2 = k_1^2 + k_2^2 + ... + k_n^2$.

Применяя оператор $\frac{d^2}{dt^2} - |k|^2$ к обеим частям уравнения (8), имеем

$$v_{km}^{(4)}(t) - 2|k|^2 v''_{km}(t) + (|k|^4 - \lambda^2) v_{km}(t) = 0.$$

Подставляя общее решение этого уравнения

$$v_{km}(t) = c_{1m} e^{t\sqrt{|k|^2+\lambda}} + c_{2m} e^{-t\sqrt{|k|^2+\lambda}} +$$
$$+ c_{3m} e^{t\sqrt{|k|^2-\lambda}} + c_{4m} e^{-t\sqrt{|k|^2-\lambda}}$$

в уравнение (8), получаем окончательный вид общего решения уравнения (8)

$$v_{km}(t) = c_{1m}\left\{e^{t\sqrt{|k|^2+\lambda}} + e^{(T-t)\sqrt{|k|^2+\lambda}}\right\} +$$
$$+ c_{2m}\left\{e^{t\sqrt{|k|^2-\lambda}} - e^{(T-t)\sqrt{|k|^2-\lambda}}\right\}, \qquad (10)$$

где c_{1m} и c_{2m} – некоторые постоянные. Используя начальные условия (9), приходим к системе линейных однородных уравнений относительно этих постоянных. Как известно, чтобы эта система имела нетривиальное решение, определитель этой системы должен равняться нулю. Таким образом, для определения параметра λ имеем следующее соотношение

$$\sqrt{|k|^2-\lambda}\left(1+e^{T\sqrt{|k|^2+\lambda}}\right)\left(1+e^{T\sqrt{|k|^2-\lambda}}\right) -$$
$$-\sqrt{|k|^2+\lambda}\left(1-e^{T\sqrt{|k|^2+\lambda}}\right)\left(1-e^{T\sqrt{|k|^2-\lambda}}\right) = 0. \quad (11)$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. При фиксированном k спектральная задача (8)–(9) в пространстве $L_2(-1,1)$ имеет полную ортонормированную систему собственных векторов $v_{km}(t)$, $m = 1,2,...$, соответствующие собственным значениям λ_{km}, которые являются корнями уравнения (11).

Доказательство. Действительно, применяя к задаче Коши (8)–(9) обратный оператор L_C^{-1} приходим к операторному уравнению

$$v_{km}(t) = \lambda (L_C^{-1} P\, v_{km})(t),$$

где $Pf(t) = f(-t)$, а функция $\upsilon(t) = L_C^{-1} f(t)$ является решением задачи Коши

$$\upsilon''(t) - k^2\upsilon(t) = f(t), \qquad \upsilon(0) = \upsilon'(0) = 0,$$
$$\forall f(t) \in L_2(0,T).$$

Тогда для оператора L_C^{-1} имеем представление

$$L_C^{-1} f(t) = \frac{1}{k}\int_0^t f(x)\,\mathrm{sh}\,k(t-x)dx,$$
$$\forall f(t) \in L_2(0,T). \qquad (12)$$

Следовательно, сопряженный оператор имеет вид

$$(L_C^{-1})^* f(t) = \frac{1}{k}\int_t^T f(x)\,\mathrm{sh}\,k(x-t)dx,$$
$$\forall f(t) \in L_2(0,T). \qquad (13)$$

Учитывая представления (12) и (13) нетрудно убедиться, что $L_C^{-1} Pf = P(L_C^{-1})^* f$. Тогда цепочка равенств

$$L_C^{-1} Pf = P(L_C^{-1})^* f = P^*(L_C^{-1})^* f = (L_C^{-1}P)^* f,$$
$$\forall f(t) \in L_2(-1,1).$$

позволяет заключить, что оператор L_C^{-1} является вполне непрерывным самосопряженным оператором Гильберта–Шмидта [4]. Следовательно, при каждом $k = 1,2,...$, спектральная задача (8)–(9) имеет полную ортонормированную систему функций $v_{km}(t)$, $m = 1,2,...$ в $L_2(0,T)$. Лемма доказана.

В силу леммы 1 имеем вещественность собственных значений задачи (8)–(9), то есть вещественность корней λ_{km} уравнения (11) и легко проверить, что $\lambda_{km} > 0$. Для этого выпишем асимптотику наименьших собственных значений λ_{km} при $k \to \infty$.

После нетривиальных преобразований уравнения (11) имеем

$$\frac{1+e^{-T\sqrt{|k|^2+\lambda}}}{1-e^{-T\sqrt{|k|^2+\lambda}}} \cdot \frac{1+e^{-T\sqrt{|k|^2-\lambda}}}{1-e^{-T\sqrt{|k|^2-\lambda}}} = \sqrt{\frac{|k|^2+\lambda}{|k|^2-\lambda}}. \quad (14)$$

Считая $|\lambda| < 1$ и логарифмируя обе части равенства (14), имеем

$$f_k(\lambda)=\ln\left(\frac{1+e^{-T\sqrt{|k|^2+\lambda}}}{1-e^{-T\sqrt{|k|^2+\lambda}}}\right)+\ln\left(\frac{1+e^{-T\sqrt{|k|^2-\lambda}}}{1-e^{-T\sqrt{|k|^2-\lambda}}}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{|k|^2+\lambda}{|k|^2-\lambda}\right)=0.$$

Вычислив производную, получаем $f_k'(0)=-\frac{1}{|k|^2}$.

Тогда искомую границу монотонности функций $f_k(\lambda)$ можно определить из соотношения

$$f'(\lambda_0)_k=f_k'(0)+f_k''(\theta\lambda_0)\lambda_0<0,$$

где $\lambda_0: 0<\lambda_0<1$, а $\theta\in(0,1)$ произвольное число. Таким образом, для определения λ_0 имеем условие

$$\lambda_0 k^2 f_k''(\theta\lambda_0)<1. \qquad (15)$$

Распишем явно вторую производную функций $f_k(\lambda)$ в точке $\theta\lambda_0$

$$f_k''(\theta\lambda_0)=T\frac{\left(\frac{T}{2}+\frac{1}{2\sqrt{|k|^2+\theta\lambda_0}}\right)e^{-T\sqrt{|k|^2+\theta\lambda_0}}}{\left(|k|^2+\theta\lambda_0\right)\left(1-e^{-2T\sqrt{|k|^2+\theta\lambda_0}}\right)}+$$

$$+T^2\frac{e^{-3T\sqrt{|k|^2+\theta\lambda_0}}}{\left(|k|^2+\theta\lambda_0\right)\left(1-e^{-2T\sqrt{|k|^2+\theta\lambda_0}}\right)^2}+$$

$$+T\frac{\left(\frac{T}{2}+\frac{1}{2\sqrt{|k|^2-\theta\lambda_0}}\right)e^{-T\sqrt{|k|^2-\theta\lambda_0}}}{\left(|k|^2-\theta\lambda_0\right)\left(1-e^{-2T\sqrt{|k|^2-\theta\lambda_0}}\right)}+$$

$$+T^2\frac{e^{-3T\sqrt{|k|^2-\theta\lambda_0}}}{\left(|k|^2-\theta\lambda_0\right)\left(1-e^{-2T\sqrt{|k|^2-\theta\lambda_0}}\right)^2}-$$

$$-\frac{2\theta\lambda_0|k|^2}{\left(|k|^4-\theta^2\lambda_0^2\right)^2}.$$

Тогда верно неравенство

$$f_k''(\theta\lambda_0)<2T\frac{\left(\frac{T}{2}+\frac{1}{2\sqrt{|k|^2-\theta\lambda_0}}\right)e^{-T\sqrt{|k|^2-\theta\lambda_0}}}{\left(|k|^2-\theta\lambda_0\right)\left(1-e^{-2T\sqrt{|k|^2+\theta\lambda_0}}\right)}+$$

$$+2T^2\frac{e^{-3T\sqrt{|k|^2+\theta\lambda_0}}}{\left(|k|^2+\theta\lambda_0\right)\left(1-e^{-2T\sqrt{|k|^2+\theta\lambda_0}}\right)^2}-$$

$$-\frac{2\theta\lambda_0|k|^2}{\left(|k|^4-\theta^2\lambda_0^2\right)^2}. \qquad (16)$$

Оценив слагаемые в правой части неравенства (16), при больших k имеем

$$f_k''(\theta\lambda_0)<\frac{3\left(2T^2+T\right)+1}{2\left(|k|^2-\theta\lambda_0\right)}.$$

К последнему применяя условие (15), получим требуемую границу для λ_0

$$|k|^2\lambda_0\frac{3\left(2T^2+T\right)+1}{2\left(|k|^2-\theta\lambda_0\right)}<1\Rightarrow\quad \lambda_0<\frac{2}{6T^2+3T+1}.$$

Таким образом, имеет место следующая лемма.

Лемма 2. Существует число λ_0 такое, что при $0<\lambda<\lambda_0<\frac{2}{6T^2+3T+1}$, справедливы следующие утверждения

1) функция $f_k'(\lambda)$ сохраняет постоянный знак;

2) для функции $f_k''(\lambda)$ выполняется неравенство $\left|\lambda k^2 f_k''(\lambda)\right|<1$, $k>1$.

Лемма 3. Асимптотика собственных значений задачи (8)–(9), не превосходящих λ_0, при больших k имеет следующий вид

$$\lambda_{k1}=4|k|^2 e^{-|k|T}\left(1+o(1)\right). \qquad (17)$$

Доказательство. Согласно лемме 2 монотонная функция $f_k(\lambda)$ на интервале $\left(0,\lambda_0\right)$ может иметь только один нуль. По формуле Тейлора имеем

$$f_k(\lambda)=f_k(0)+\frac{f_k'(0)}{1!}\lambda+\frac{f_k''(\theta\lambda)}{2!}\lambda^2<0,$$

$$0<\theta\lambda<1.$$

Подставляя вычисленные значения функций и ее производной, получаем

$$f_k(\lambda)=2\ln\left(\frac{1+e^{-|k|T}}{1-e^{-|k|T}}\right)-$$

$$-\frac{1}{|k|^2}\lambda+f_k''(\theta\lambda)\frac{\lambda^2}{2}.$$

Тогда нулем линейной части функций

$$|k|^2 f_k(\lambda)=$$

$$=2|k|^2\ln\left(\frac{1+e^{-|k|T}}{1-e^{-|k|T}}\right)-\lambda+|k|^2 f_k''(\theta\lambda)\frac{\lambda^2}{2}$$

будет

$$\lambda_{k1}=2|k|^2\ln\left(\frac{1+e^{-|k|T}}{1-e^{-|k|T}}\right).$$

При достаточно больших $k>>1$, учитывая асимптотические формулы, последнее можно записать виде

$$\lambda_{k1}=4|k|^2 e^{-|k|T}(1+o(1)).$$

Учитывая результат леммы 2 на окружности $\lambda_{k1}=4|k|^2 e^{-|k|T}(1+\varepsilon)$, где ε – сколь угодное малое положительное число, для достаточно больших $k\ge k_0(\varepsilon)$ легко проверить справедливость неравенства

$$\left|f_k''(\theta\lambda)|k|^2\lambda^2\right|_{|\lambda|=4|k|^2e^{-|k|T}(1+o(1))}\le$$

$$\le\left|2|k|^2\ln\left(\frac{1+e^{-|k|T}}{1-e^{-|k|T}}\right)-\lambda\right|_{|\lambda|=4|k|^2e^{-|k|T}(1+o(1))}.$$

Тогда по теореме Руше [5] имеем, что количество нулей функции $k^2f_k(\lambda)$ и ее линейной части совпадают и лежат внутри круга $|\lambda|<4|k|^2e^{-|k|T}(1+\varepsilon)$. Следовательно, функция $k^2f_k(\lambda)$ при $0<\lambda<\lambda_0$ имеет один нуль, асимптотика которого задается формулой (17). Лемма 3 доказана.

Проведя нормировку функций, определяемых формулой (7), имеем следующую теорему.

Теорема 1. Спектральная задача Коши (4)–(6) имеет полную ортонормированную систему собственных векторов $u_{km}(x,t)=$ $=\sin k_1x_1\cdot\sin k_2x_2\cdot\ldots\cdot\sin k_nx_n\cdot v_{km}(t)$, где $v_{km}(t)$, задаются формулой (10),а собственные значения λ_{km}, являются корнями уравнения (11), при этом при больших k наименьшее собственное значение λ_{k1} имеет асимптотику (17).

Теперь применим найденные спектральные характеристики задачи (4)–(6) для решения задачи Коши (1)–(3). Пусть $u(x,t)\in C^2(\Omega)$ – решение задачи (1)–(3). Тогда в силу полноты и ортонормированности собственных функций $u_{km}(x,t)$ задачи (4)–(6) функцию $u(x,t)$ в пространстве $L_2(\Omega)$ можно разложить в ряд

$$u(x,t)=\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{km}u_{km}(x,t),\quad(18)$$

где a_{km} – коэффициенты Фурье по системе $u_{km}(x,t)$. Переписав уравнение (1) в виде

$$LPu=P(u_{tt}(x,t)+u_{xx}(x,t))=Pf(x,t),\quad(19)$$

и подставив решение (18) в равенство (19), с учетом соотношения

$$P\Delta u_{km}(x,t)=\lambda_{km}u_{km}(x,t)$$

имеем

$$a_{km}=\frac{\tilde{f}_{km}}{\lambda_{km}},$$

где

$$\tilde{f}_{km}=(f(x,-t),u_{km}(x,t)).$$

Таким образом, для решения $u(x,t)$ получим следующее представление

$$u(x,t)=\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tilde{f}_{km}}{\lambda_{km}}u_{km}(x,t).\quad(20)$$

Отметим, что представление (20) остается справедливым для любого сильного решения задачи (1)–(3). Естественно возникает вопрос, для какого подмножества функций $f\in L_2(\Omega)$

существует сильное решение? Для ответа на вопрос преобразуем формулу (20) к следующему виду

$$u(x,t)=\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{\tilde{f}_{k1}}{\lambda_{k1}}u_{k1}(x,t)+$$

$$+\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\tilde{f}_{km}}{\lambda_{km}}u_{km}(x,t)$$

из которого следует, что

$$\|u\|^2=\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}\left|\frac{\tilde{f}_{k1}}{\lambda_{k1}}\right|^2+$$

$$+\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}\left|\frac{\tilde{f}_{km}}{\lambda_{km}}\right|^2. \qquad (21)$$

В силу леммы 3 имеем $\lambda_{km}\geq\frac{1}{17},\ m>1,$ поэтому правая часть равенства (21) ограничена только для тех $f(x,t)$, для которых ограничена следующая весовая норма

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}\left|\frac{\tilde{f}_{k1}}{\lambda_{k1}}\right|^2<\infty. \qquad (22)$$

Тем самым доказана

Теорема 2 Сильное решение смешанной задачи Коши существует тогда и только тогда, когда $f(x,t)$ удовлетворяет неравенству (22).

Если обозначим через $\bar{L}_C^{-1}$ обратный оператор сильного оператора $\bar{L}_C$ определяемых соотношением (1)–(3), то из теоремы 2 немедленно следует

Теорема 3. Оператор $\bar{L}_C^{-1}$ отображает единичный шар $\|f\|\leq 1$ в шар $\|u\|\leq N$ тогда и только тогда когда существует $k_0(N)$ такой, что выполняются условия

$$\tilde{f}_{k1}=(Pf,u_{k1})=0,$$

$$k=k_0(N),\ k_0(N)+1,\dots,$$

где $Pf(x,t)=f(x,-t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 352 с.
2. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 142 с.
3. *Лаврентьев М.М.* О задаче Коши для уравнения Лапласа // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1956. Т. 20, №6. С. 819-842.
4. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
5. *Титчмарш Е.* Теория функций. М.: Наука, 1980. 463 с.
6. *Кальменов Т.Ш., Искакова У.А.* Критерий сильной разрешимости смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа // Доклады НАН РК. 2007. Т. 414, №2. С. 168-171.
7. *Кальменов Т.Ш., Искакова У.А.* Об одном методе решения задачи Коши для уравнения Лапласа // Доклады НАН РК. 2008. Т. 423, №4. С. 449-451.

Резюме

Көп өлшемді параллепипедте ауытқыған аргументті Лаплас теңдеуі үшін Коши есебін спектралдық жіктеу арқылы Лаплас теңдеуі үшін Коши есебінің күшті шешімі бар болатыны көрсетілген.

Summary

In multidimensional parallelepiped method of spectral resolution decision Cauchy for Laplace equation with defrection argument established to test of strong decision Cauchy problem for Laplace equation.

Институт математики, информатики и механики

Поступила 19.05.09г.