ПРЕДСТАВЛЕНИЯ S_n НА НЕКОТОРЫХ КОРНЕВЫХ ДЕРЕВЬЯХ В СВОБОДНОЙ ПРАВО-КОММУТАТИВНОЙ АЛГЕБРЕ

Б. К. Жахаев

Университет им. Сулеймана Демиреля, Каскелен, Казахстан

Ключевые слова: свободная алгебра, мульти-линейная часть, тождество, неприводимый модуль, базис, корневые деревья, Юнг симметризатор, группа автоморфизмов, цикловой индекс, модуль перестановка.

Аннотация. Алгебра с тождеством $(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b$ называется право-коммутативной. В работе [2] базис право-коммутативной алгебры построен с помощью корневых деревьев. Исследование многообразий свободных алгебр приводят к исследованию мульти-линейой части свободной алгебры как S_n—модуль. Исследование на S_n—модулей это есть представления группы перестановок S_n. В теореме Машке сказано, что любая конечномерная V G-модуль разлагается на неприводимую G—подмодулей, где V конечномерное векторное пространство, G любая конечномерная группа. $\mathbb{C}S_n$ есть групповая алгебра группы S_n и S_n—модуль. Неприводимые S_n—подмодули в $\mathbb{C}S_n$ S_n—модулья называются модулем Шпехта. Размерность модуля Шпехта для разбиение $\lambda \vdash n$ в $\mathbb{C}S_n$ S_n—модуле равна количеству стандартных таблиц Юнга для разбиение $\lambda \vdash n$. Кратность модуля Шпехта для разбиение $\lambda \vdash n$ в $\mathbb{C}S_n$ S_n—модуле равна количеству стандартных таблиц Юнга для разбиение $\lambda \vdash n$. В этой статье рассматривается мульти-линейная часть $F_n^{multi}(X)$ свободной право-коммутативной алгебры $F(X)$ как S_n—модуль. Полностью описываются представления S_n на некоторых корневых деревьях. Иными словами описываются разложения на модули Шпехта.

Поступила 07.07.2015 г.

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 4, Number 302 (2015), 192 – 197

ABOUT FOURIER SUBMISSION OF THE STRONG SOLUTION OF THE TASK OF CAUCHY FOR THE STORM LIOUVILLE EQUATION

S. T. Ahmetova, A. B. Imanbaeva, A. Sh. Shaldanbaev

M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan.
E-mail: shaldanbaev51@mail.ru

Keywords: Cauchy's task self-conjugacy, quite continuity, Storm Liouville equation.

Abstract. Problem definition. Let continuous function on a segment [0,1], i.e. We will consider Cauchy's task for the simplest equation of Storm Liouville:

$$Ly = y''(x) = f(x), x \in (0,1) \tag{1.1}$$

$$y(0) = y'(0) = 0. \tag{1.2}$$

DEFINITION 1.1. (1.1)-(1.2) twice continuously differentiable function satisfying the equations (1.1) and to regional conditions (1.2) is called as the regular solution of a regional task.

For any continuous function there is the only regular solution of a regional task (1.1)-(1.2) which is set by a formula

$$y(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt. \tag{1.3}$$

DEFINITION 1.2. Function is called as the strong solution of a task of Cauchy (1.1)-(1.2) if there is a sequence of regular solutions of tasks of Cauchy (1.1)-(1.2) such that in space.

DEFINITION 1.3. Cauchy's task (1.1)-(1.2) is called strongly solvable if for any there is the only strong decision.

Cauchy's task (1.1)-(1.2) is strongly solvable and the decision is given by the same formula (1.3), but for the practical purpose it is a formula is a little suitable as often the integral will be not calculated in a quadrature therefore approximate methods of calculation of certain integrals are applied. But these methods also encounter obstacles the matter is that in our situation the upper bound of integral is a variable and this circumstance creates additional difficulties. The classical method of Fourier - decomposition of the decision on own functions is also not applicable because of the absence of the last because, it is well known a volterrovost of a task of Cauchy.

PROBLEM. Whether decomposition of the solution of a task of Cauchy (1.1)-(1.2) in a row of Fourier on some orthonormalized system is possible so that the partial sums of this row in the best way approached this decision among all finite-dimensional approximations.

УДК 517.91

О ФУРЬЕ ПРЕДСТАВЛЕНИИ СИЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

С. Т. Ахметова, А. Б. Иманбаева, А. Ш. Шалданбаев

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

Ключевые слова: задача Коши самосопряженость, вполне непрерывность, уравнение Штурма-Лиувилля.

Аннотация.В настоящей работе получено Фурье разложение решении задачи Коши для уравнения Штурма-Лиувилля.

1. Введение.

Постановка задачи. Пусть $f(x)$ непрерывная функция на сегменте [0,1], т.е. $f(x) \in C[0,1]$. Рассмотрим задачу Коши для простейшего уравнения Штурма-Лиувилля:

$$Ly = y''(x) = f(x), x \in (0,1) \tag{1.1}$$

$$y(0) = y'(0) = 0. \tag{1.2}$$

Определение 1.1. Регулярным решением краевой задачи (1.1)-(1.2) называется дважды непрерывно дифференцируемая функция $y(x)$, удовлетворяющая уравнения (1.1) и краевым условиям (1.2).

Для любой непрерывной функции $f(x)$ существует единственное регулярное решение краевой задачи (1.1)-(1.2), которое задается формулой

$$y(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt. \tag{1.3}$$

Определение 1.2. Функция $y(x)$ называется сильным решением задачи Коши (1.1)-(1.2), если существует последовательность регулярных решений $\{y_n(x)\}$ задач Коши (1.1)-(1.2) такая, что $Ly_n \to f(x), y_n(x) \to y(x)$ в пространстве $L^2(0,1)$.

Определение 1.3. Задача Коши (1.1)-(1.2) называется сильно разрешимой, если для любого $f(x) \in L^2(0,1)$ существует единственное сильное решение.

Задача Коши (1.1)-(1.2) сильно разрешима и решение дается той же формулой (1.3), но для практической цели это формула мало пригодна, поскольку зачастую интеграл окажется не вычисляемой в квадратуре, поэтому применяются приближенные методы вычисления определенных интегралов. Но эти методы также наталкиваются на препятствия, дело в том, что в нашей ситуации верхняя граница интеграла является переменной величиной и это обстоятельство создает дополнительные трудности. Классический метод Фурье- разложение решения по собственным функциям также не применим из-за отсутствия последних, ибо ,хорошо известно вольтерровость задачи Коши.

Проблема. Возможно ли разложение решения задачи Коши (1.1)-(1.2) в ряд Фурье по некоторой ортонормированной системе так, чтобы частичные суммы этого ряда наилучшим образом приближали этого решения среди всех конечномерных приближений.

2. Методы исследований. Пусть $H = L^2(0,1)$ пространство Гильберта, A- линейный вполне непрерывный оператор, определенный на этом пространстве, а S- инволюция, определенный формулой:

$$Su(x) = u(1-x). \tag{2.1}$$

Нетрудно установить, что оператор S является унитарным и самосопряженным, поэтому имеет место равенство

$$S^2 = I. \tag{2.2}$$

Лемма 2.1. Если вполне непрерывный оператор A удовлетворяет условию

$$SA = A^*S, \tag{2.3}$$

то оператор SA является вполне непрерывным и самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $H = L^2(0,1)$.

Доказательство. Во-первых, имеет место равенство $(SA)^* = A^*S^* = A^*S = SA$. Во-вторых, произведение ограниченного и компактного оператора компактен.

Лемма 2.2. Если A оператор интегрирования, определенный формулой

$$Ay(x) = \int_0^x y(t)dt \tag{2.4}$$

в гильбертовом пространстве $H = L^2(0,1)$, то имеет место формула

$$SA = A^*S,$$

где S- оператор, определенный формулой (2.1).

Доказательство.

а) $(Ay, z) = \int_0^1 \int_0^t y(\xi)d\xi \cdot \overline{z(t)}dt = -\int_0^1 \int_0^t y(\xi)d\xi \cdot d\int_t^1 \bar{z}(\xi)d\xi = -\int_0^t y(\xi)d\xi \cdot \int_t^1 \overline{z(\xi)}d\xi \Big|_0^1 + \int_0^1 y(\xi) \cdot \int_t^1 \overline{z(\xi)}d\xi dt = (y, A^*z), \Rightarrow A^*z(x) = \int_x^1 z(t)dt;$

б) $SAy(x) = \int_0^{1-x} y(t)dt = \begin{vmatrix} 1-t=\xi \\ -dt = d\xi \end{vmatrix} = -\int_1^x y(1-\xi)d\xi = \int_x^1 y(1-\xi)d\xi =$

$$\int_x^1 Sy(\xi)d\xi = A^*S.$$

Лемма 2.3. Если A оператор интегрирования, определенный формулой

$$Af(x) = \int_0^x f(t)dt \tag{2.4}$$

то имеет место формула

$$A^2y(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt. \tag{2.5}$$

Доказательство. $A^2f(x) = A\big(Af(x)\big) = A\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \int_0^t f(\xi)d\xi dt =$

$t\int_0^t f(\xi)d\xi \Big|_0^x - \int_0^x f(t)\cdot tdt = x\int_0^x f(\xi)d\xi - \int_0^x f(t)tdt = \int_0^x (x-t)f(tdt).$

Лемма 2.4. Если A оператор интегрирования, определенный формулой (2.4), то имеет место формула

$$SA^2 = (A^2)^*S, \tag{2.6}$$

где S - инволюция, определенный формулой (2.1).

Доказательство. $SA^2 = SAA = A^*SA = A^*A^*S = (A^2)^*S.$

Лемма 2.5. Если A вольтерровый оператор, S- унитарный оператор и имеют место равенства

$$SA = A^*S, S = S^*, N(A) = \{0\}, \tag{2.7}$$

то операторное уравнение

$$Au = f \tag{2.8}$$

имеет в пространстве H единственное решение вида

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(f, S\varphi_j)}{\lambda_j}\varphi_j, \tag{2.9}$$

где λ_j- собственное значение оператора SA, а φ_j- собственные векторы этого оператора.

Доказательство. По условию леммы оператор A компактный, а в силу условий $SA = A^*S$, $S = S^*$ оператор SA- самосопряженный и компактный. По теореме Гильберта-Шмидта для любого вектора u пространства H имеет место разложение

$$SAu = \sum_{j=1}^{\infty} (SAu, \varphi_j)\, \varphi_j + \varphi_0,$$

где $\varphi_0 \in N(SA)$. В нашем случае $N(SA) = \{0\}$, поэтому

$$SAu = \sum_{j=1}^{\infty} (SAu, \varphi_j)\, \varphi_j = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (u, \varphi_j)\varphi_j, \Rightarrow (SAu, \varphi_j) = \lambda_j (u, \varphi_j), (u, \varphi_j) = \frac{(SAu, \varphi_j)}{\lambda_j}.$$

Если $(u, \varphi_j) = 0$, то $SAu = 0$, $\Rightarrow u = 0$, следовательно, система $\{\varphi_j\}$ является полной ортогональной системой. Полагая ее ортонормированной, имеем

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} (u, \varphi_j)\varphi_j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(SAu, \varphi_j)}{\lambda_j}\varphi_j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(Sf, \varphi_j)}{\lambda_j}\varphi_j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(f, S\varphi_j)}{\lambda_j}\varphi_j.$$

3. Результаты исследований. Пусть оператор A определен формулой

$$Af(x) = \int_0^x f(t)dt, \tag{3.1}$$

тогда в силу формул (1.3), (2.5) решение задачи Коши (1.1)-(1.2) имеет вид

$$y(x) = A^2 f(x). \tag{3.2}$$

Действуя на обе части этого равенства оператором S, имеем

$$Sy(x) = SA^2 f(x). \tag{3.3}$$

В силу леммы 2.4 оператор SA^2 самосопряжен, а в силу формулы (1.3) оператор SA^2 компактен. Если $A^2 f = 0$, то $f = 0$, в самом деле, в этом случае

$$\int_0^x (x - t) f(t)dt = 0.$$

Дважды продифференцировав это равенство и воспользовавшись теоремой Лебега [1], получим $f(x) = 0$ почти всюду. В силу теоремы Гильберта-Шмидта имеет место разложение

$$SA^2 f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (SA^2 f, \varphi_n)\, \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (f, \varphi_n)\varphi_n,$$

где $SA^2\varphi_n = \lambda_n \varphi_n, n = 1,2, \ldots$ следовательно, в силу формул 2.10, 2.11 решение задачи Коши имеет вид

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)\, \lambda_n \cdot S\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)\lambda_n \varphi_n\, (1 - x). \tag{3.4}$$

Нами доказана следующая теорема.

Теорема 3.2. Задача Коши

$$Ly = y''(x) = f(x), x \in (0,1) \tag{3.5}$$

$$y(0) = y'(0) = 0. \tag{3.6}$$

сильно разрешима в пространстве $L^2(0,1)$ и это сильное решение имеет вид

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)\lambda_n \varphi_n\, (1 - x), \tag{3.7}$$

где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в пространстве $L^2(0,1)$.

$$SA^2\varphi_n = \lambda_n \varphi_n, \tag{3.8}$$

$$A^2 y(x) = \int_0^x (x - t) f(t)dt. \tag{3.9}$$

4. Выводы. Результаты данной работы могут быть использованы в спектральной теории операторов [2-13].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа.- М.: Наука, 1980.

[2] Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. О полноте собственных векторов задачи Коши. - Республиканский научный журнал «Наука и образования ЮК» № 27, 2002. с. 58-62.

[3] Шалданбаев А.Ш. Об операторах симметрии. - Республиканская научная конференция "Дифференциальные уравнения и теория колебаний" – Алматы, 10-12 октября 2002г, с. 81-84.

[4] Шалданбаев А.Ш., Аширбекова К.Ш. О кратности спектра оператора Штурма-Лиувилля. Республиканская научная конференция "Дифференциальные уравнения и теория колебаний". – г. Алматы, 10-12 октября 2002г., с. 84-86.

[5] Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. О полноте собственных векторов периодической и антипериодической задачи. - Республиканский научный журнал «Наука и образование ЮК» №34, 2003г, - с. 25-30.

[6] Шалданбаев А.Ш., Аширбекова Ж.Ш. Об одном необходимом признаке симметрии задачи Штурма-Лиувилля. - Республиканский научный журнал «Наука и образование ЮК» №34, 2003г, - с. 133-136.

[7] Шалданбаев А.Ш. Необходимое и достаточное условие существования сильного решения для параболического уравнения с обратным течением времени. - КазНУ им. АльФараби «Вестник», г. Алматы, №2 (53), 2007. – с.58-72.

[8] Шалданбаев А.Ш. О формулах следов одного класса операторов Штурма-Лиувилля. - Башкирский Государственный Университет, «Вестник», том 14, №2, 2009. – с.351-355.

[9] Шалданбаев А.Ш. О сингулярно возмущенной задаче Коши в пространстве $L^2(0,1)$. // Математический журнал. г.Алматы, 2008, т.8, №4(30), с. 88-97.

[10] Шалданбаев А.Ш. Решение сингулярно возмущенной задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами методом отклоняющегося аргумента. // Вестник КазНУ, серия мат.-мех., инф., 2010г, №1, с. 85-87.

[11] Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. Об одном рекуррентном методе решения сингулярно сингулярно возмущенной задачи Коши для уравнения второго порядка. // Математические труды. г.Новосибирск. 2010, т.13, №2, с. 128-138.

[12] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction. Iournal of Jnverse and ill- posed problems.2010,v18,№4,p.352-369.

[13] Шалданбаев А.Ш. Спектральные разложения корректных-некорректных начально краевых задач для некоторых классов дифференциальных уравнений.- 193с, LAP LAMBEPT Academic Pyblishing. http://dnb.d-nb.de. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011,Germanu.

REFERENCES

[1] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Jelementy teorii funkcii i funkcional'nogo analiza.- M.: Nauka, 1980.

[2] Shaldanbaev A.Sh., Ahmetova S.T. O polnote sobstvennyh vektorov zadachi Koshi. - Respublikanskij nauchnyj zhurnal «Nauka i obrazovanija JuK» № 27, 2002. s. 58-62.

[3] Shaldanbaev A.Sh. Ob operatorah simmetrii. - Respublikanskaja nauchnaja konferencija "Differencial'nye uravnenija i teorija kolebanij" – Almaty, 10-12 oktjabrja 2002g, s. 81-84.

[4] Shaldanbaev A.Sh., Ashirbekova K.Sh. O kratnosti spektra operatora Shturma-Liuvillja. Respublikanskaja nauchnaja konferencija "Differencial'nye uravnenija i teorija kolebanij". – g. Almaty, 10-12 oktjabrja 2002g., s. 84-86.

[5] Shaldanbaev A.Sh., Ahmetova S.T. O polnote sobstvennyh vektorov periodicheskoj i antiperiodicheskoj zadachi. - Respublikanskij nauchnyj zhurnal «Nauka i obrazovanie JuK» №34, 2003g, - s. 25-30.

[6] Shaldanbaev A.Sh., Ashirbekova Zh.Sh. Ob odnom neobhodimom priznake simmetrii zadachi Shturma-Liuvillja. - Respublikanskij nauchnyj zhurnal «Nauka i obrazovanie JuK» №34, 2003g, - s. 133-136.

[7] Shaldanbaev A.Sh. Neobhodimoe i dostatochnoe uslovie sushhestvovanija sil'nogo reshenija dlja parabolicheskogo uravnenija s obratnym techeniem vremeni. - KazNU im. Al'Farabi «Vestnik», g. Almaty, №2 (53), 2007. – s.58-72.

[8] Shaldanbaev A.Sh. O formulah sledov odnogo klassa operatorov Shturma-Liuvillja. - Bashkirskij Gosudarstvennyj Universitet, «Vestnik», tom 14, №2, 2009. – s.351-355.

[9] Shaldanbaev A.Sh. O singuljarno vozmushhennoj zadache Koshi v prostranstve $L^2(0,1)$. // Matematicheskij zhurnal. g.Almaty, 2008, t.8, №4(30), s. 88-97.

[10] Shaldanbaev A.Sh. Reshenie singuljarno vozmushhennoj zadachi Koshi dlja sistemy obyknovennyh differencial'nyh uravnenij s peremennymi kojefficientami metodom otklonjajushhegosja argumenta. // Vestnik KazNU, serija mat.-meh., inf., 2010g, №1, s. 85-87.

[11] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. Ob odnom rekurrentnom metode reshenija singuljarno singuljarno vozmushhennoj zadachi Koshi dlja uravnenija vtorogo porjadka. // Matematicheskie trudy. g.Novosibirsk. 2010, t.13, №2, s. 128-138.

[12] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction. Iournal of Jnverse and ill- posed problems.2010,v18,№4,p.352-369.

[13] Shaldanbaev A.Sh. Spektral'nye razlozhenija korrektnyh-nekorrektnyh nachal'no kraevyh zadach dlja nekotoryh klassov differencial'nyh uravnenij.- 193c, LAP LAMBEPT Academic Pyblishing. http://dnb.d-nb.de. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011,Germanu.

ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ТЕҢДЕУІНІҢ КОШИ ЕСЕБІНІҢ ӘЛДІ ШЕШІМІНІҢ ФҮРЕЛІК КЕЙПІ

С. Т. Ахметова, А. Б. Иманбаева, А. Ш. Шалданбаев

М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан

Тірек сөздер:Кошидің есебі,жалқы оператор,әсіре үзіксіздік, Штурм-Лиувилл теңдеуі.

Аннотация. Бұл еңбекте Штурм-Лиувилл теңдеуіне арналған Коши есебінің шешімінің Фурье кейпі табылды.

Поступила 07.07.2015 г.

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 4, Number 302 (2015), 197 – 207

INVESTIGATION OF FILTERED DENSITY FUNCTION FOR LARGE EDDY SIMULATION OF CHEMICALLY REACTING TURBULENT FLOWS

M. K. Inkarbekov, A. Kaltayev

Kazakh national university named after Al-Farabi, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: inkarbekovm@gmail.com

Key words: turbulence, filtered density function, large-eddy simulation, Monte Carlo method, direct numerical simulation.

Abstract. The methodology of “filltered density function” (FDF) is surveyed and implemented for large eddy simulation (LES) of incompressible chemically reacting turbulent flows. In this methodology the effect of chemical reactions appears in a closed form and the influences of SGS mixing and convection are modeled. The FDF transport equation is solved numerically via a Lagrangian Monte Carlo scheme. The consistency of the FDF approach, the convergence of its Monte Carlo solution and the performance of the closures employed in the FDF transport equation are assessed by comparisons with results obtained by direct numerical simulation (DNS). The FDF results show a much closer agreement with filtered DNS results.

УДК 532; 533

ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЛЬТРОВАННОЙ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ КРУПНЫХ ВИХРЕЙ ХИМИЧЕСКИ РЕАГИРУЮЩИХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

М. К. Инкарбеков, А. Калтаев

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: турбулентность, фильтрованная функция плотности, моделирования крупных вихрей, метод Монте-Карло, прямое численное моделирование.