ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЫНЫҢ МЕНШІКТІ МӘНДЕРІНІҢ ЕСЕЛІ БОЛУЫНЫҢ БІР БЕЛГІСІ ТУРАЛЫ

А. Б. Иманбаева, С. Т. Ахметова, А. Ш. Шалданбаев

М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан

Тірек сөздер: меншікті мәндер,спектрдің еселігі, Штурм-Лиувилл операторы.

Аннотация. Бұл еңбекте шекарарлық шарттары өзара тәуелсіз $Ly = -y''(x) = \lambda^2 y(x)$ Штурм-Лиувилл операторының меншікті мәндерінің еселік болуының бір белгісі табылды.

Поступила 07.07.2015 г.

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 4, Number 302 (2015), 172 – 181

WEIGHTED FUNCTIONAL INEQUALITIES

Sh. Bilal, A. B. Darzhanova

Institute of Mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: bilal44@mail.ru

Keywords: weight, inequality, investment, compact, space.

Abstract. With the emergence of a new direction in functional analysis - "embedding theorems of the functional spaces" - it turned out that study of the many qualitative properties of differential and integral operators is equivalent to the determination of appropriate embedding theorems with certain properties. Particularly, this approach gives productive results in establishing the properties of singular operators and embedding theorems of weighted spaces. In this article are discussed embedding of weighted spaces, embedding of functions with absolutely - continuous derivatives of a certain order in the Lebesgue space or score weighted inequality of Hardy. Obtained the necessary and sufficient conditions for the weighted inequality of Hardy or investments mentioned spaces. Founded matching two-sided estimates in order. Criterion for compactness of the embedding operator was given. It uses the method of localization based on a detailed study of the objects in the "characteristic" range, introduced in addictive behavior factors. One productive approach in studies of this kind belongs to M. Otelbaev which we use too.At the same time the results of this work are the results of the Oynarova'saddition.

УДК 517.51

О ВЕСОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ

Ш. Билал, А. Б. Даржанова

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: весовые, неравенства, вложение, компактность, пространства.

Аннотация. С возникновением нового направления в функциональном анализе - «теоремы вложения функциональных пространств» - выяснилось, что изучение многих качественных свойств дифференциальных и интегральных операторов эквивалентно установлению соответствующих теорем вложения с теми или иными свойствами. Особенно, такой подход дает плодотворные результаты в установлении свойств сингулярных операторов и теорем вложений весовых пространств. В данной статье рассматривается вложение весовых пространств, вложение пространства функций, имеющих абсолютно-непрерывные производные

определенного порядка в Лебеговое пространство или оценка весового неравенства типа Харди. Получены необходимые и достаточные условия выполнения весового неравенства типа Харди или вложения упомянутых пространств. Найдены двухсторонние оценки совпадающие по порядку. Дан критерий компактности оператора вложения. При этом используется метод локализации основанный на детальном изучении исследуемых объектов на "характеристическом" интервале, внедренный в зависимости поведений коэффициентов. Один из плодотворных подходов в исследованиях такого рода принадлежит М. Отелбаеву [18] которым пользуемся и мы. При этом результаты данной работы представляют собой дополнение результатов работы Р. Ойнарова [20].

В теории сингулярных интегро-дифференциальных операторов центральное место занимает вопросы, связанные с изучением свойств операторов в зависимости от поведения коэффициентов соответствующего интегро-дифференциального выражения. В этом направлении получены фундаментальные результаты в работах С.М. Никольского, Л.Д. Кудрявцева, А. Куфнер, П.И. Лизоркина, В.Г. Мазья, Ж.Л. Лионса, Э. Мадженеса, М.Ш. Бирмана, М. Отелбаева, С.Н. Похожаева, В.И. Буренкова, К. Бойматова, В.Д. Степанова,Р. Ойнарова и других [3–16, 21].

Пусть ρ , υ , r - заданные весовые функции, определенные на интервале J = (a,b), $-\infty \le a < b \le \infty$, удовлетворяют на этом интервале следующим требованиям:

$$\begin{aligned} &0 < \rho(x) \in L_{\infty}^{loc}(J), \quad \rho^{-1}(x) \in L_{1}^{loc}(J), \\ &0 < \upsilon(x) \in C^{loc}(J), \quad 0 \le r(x) \in C^{loc}(J) \end{aligned} \tag{1}$$

При этом будем считать, что $\rho^{-1}(x)$ не суммируема хотя бы в одном конце интервала J. И пусть это будет окрестность точки $x = a$.

Введем в рассмотрение следующие величины, харектеризующие локальное поведение весовых функций:

$$\omega(x,y) = \sup\left\{ d > 0 : \int_{x-d}^{x} \rho^{-1}(\tau)d\tau \le \int_{x}^{x+y} \rho^{-1}(\tau)d\tau, (x-d, x+y] \subset J \right\},$$

$$d^{+}(x) = \sup\left\{ d > 0 : \sup_{x-\omega(x,d) \le t \le x+d} \upsilon(t) \int_{x-\omega(x,d)}^{x+d} \rho^{-1}(\tau)d\tau \le 1, [x, x+d) \subset J \right\},$$

$$d^{-}(x) = \omega\left(x, d^{+}(x)\right).$$

Обозначим

$$\Delta(x) = \left[x - d^{-}(x), x + d^{+}(x)\right] = \left[x^{-}, x^{+}\right], \quad \Delta^{-}(x) = \left[x - d^{-}(x), x\right], \quad \Delta^{+}(x) = \left[x, x + d^{+}(x)\right]$$

Будем считать, что для некоторого $c \in (a,b)$ выполнено

$$\lim_{t \to a}\left(\upsilon(t) \int_{t}^{c} \rho^{-1}(\tau)d\tau \right) = \infty, \quad \lim_{t \to b}\left(\upsilon(t) \int_{c}^{t} \rho^{-1}(\tau)d\tau \right) = \infty \tag{2}$$

Лемма 1. Имеет место неравенство [1]:

$$\int_{y-d^{-}(y)}^{y+d^{+}(y)} \rho^{-1}(\tau)d\tau \le 2 \int_{x-d^{-}(x)}^{x+d^{+}(x)} \rho^{-1}(\tau)d\tau \quad \forall y \in \Delta(x) \quad (3) \int_{\Delta^{\pm}(y)} \rho^{-1}(\tau)d\tau \le 2 \int_{\Delta^{\pm}(x)} \rho^{-1}(\tau)d\tau$$

Рассмотрим условия выполнения неравенства

$$\|rf\|_{\infty} \le c\left(\|\rho f'\|_{\infty} + \|\upsilon f\|_{\infty}\right) \tag{4}$$

Введем функцию $\mathrm{B}(x) = \sup\limits_{x^{-} \le z \le x} r(z) \int\limits_{x^{-} - d^{-}(x^{-})}^{z} \rho^{-1}(\tau)d\tau + \sup\limits_{x \le z \le x^{+}} r(z) \int\limits_{z}^{x^{+} - d^{+}(x^{+})} \rho^{-1}(\tau)d\tau.$

Теорема 1 [2]. Пространство W'_∞ вложено в $L_{\infty,r}$ тогда и только тогда или неравенство (4) выполнено тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{B} = \sup_{x\in J} \mathrm{B}(x) < \infty \tag{5}$$

При этом для нормы оператора вложения $E : W'_\infty \to L_{\infty,r}$ справедлива оценка:

$$c^{-1}\mathrm{B} \le \|E\| \le c\mathrm{B} \tag{6}$$

Пусть $AC^{n+1}\left(\overset{\circ}{R}_+\right)\left(R_+ = [0,\infty)\right)$ - совокупность функций, имеющих абсолютно непрерывные производные $(n+1)$ - го порядка и обращающихся в нуль некоторой окрестности бесконечно удаленной точки, своей для каждой функции.

Обозначим через H^n_∞ пополнение пространства $AC^{n+1}\left(\overset{\circ}{R}_+\right)$ по норме

$$\|f\|_{H^n_\infty} = \left\|\rho f^{(n+1)}\right\|_\infty + \left\|\upsilon f^{(n)}\right\|_\infty .$$

Здесь $\upsilon, \rho \in C[0,N]$ $\forall N > 0$. Продолжим функции υ, ρ четным образом на всю ось и будем предполагать выполнение условия (2). Положим

$$\rho_*(x) = \left(\int_{\Delta^+(x)} \rho^{-1}(\tau)\,d\tau\right)^{-1}$$

Лемма 2. Имеет место неравенство

$$\left\|\rho_* f^{(n)}\right\|_\infty \le K\|f\|_{H^n_\infty} \quad \forall f \in AC^{n+1}\left(\overset{\circ}{R}_+\right), \tag{7}$$

где постоянная $K > 0$ не зависит от υ, ρ и f.

Доказательство. Положим $\varphi = f^{(n)}$. Тогда (7) имеет вид

$$\|\rho_*\varphi\|_{\infty,R_+} \le K\left(\|\rho\varphi'\|_{\infty,R_+} + \|\upsilon\varphi\|_{\infty,R_+}\right) \tag{8}$$

Продолжим функцию φ четным образом на всю ось. Тогда (8) эквивалентно неравенству

$$\|\rho_*\varphi\|_{\infty,R} \le K\|\varphi\|_{W'_\infty(R)} \tag{9}$$

По теореме 1 (9) выполнено, если

$$\sup_{x\in R} \mathrm{B}(x) < \infty ,$$

где

$$\mathrm{B}(x) = \sup_{x^- \le z \le x} \rho_*(z) \int_{x^- - d^-(x^-)}^{z} \rho^{-1}(\tau)\,d\tau + \sup_{x \le z \le x^+} \rho_*(z) \int_{z}^{x^+ + d^+(x^+)} \rho^{-1}(\tau)\,d\tau$$

Имеем

$$\rho_*(z) \int_{x^- - d^-(x^-)}^{z} \rho^{-1}(\tau)\,d\tau \le \rho_*(z) \int_{x^- - d^-(x^-)}^{x^-} \rho^{-1}(\tau)\,d\tau + \rho_*(z) \int_{x^-}^{z} \rho^{-1}(\tau)\,d\tau \le$$

$$\le \rho_*(z)\left(\rho_*(x^-)\right)^{-1} + \rho_*(z)\left(\rho_*(z)\right)^{-1} .$$

Так как $x^- \in \Delta^-(z)$ $\forall z \in \Delta^-(x)$, то по лемме 1 $\rho_*(z) \le 2\rho_*(x^-)$ $\forall z \in \Delta^-(x)$.

Поэтому $\rho_*(z)\int\limits_{x^- - d^-(x^-)}^{z}\rho^{-1}(\tau)d\tau \le 3$ при $z\in\Delta^-(x)$.

Аналогично $\rho_*(z)\int\limits_{z}^{x^+ + d^+(x^+)}\rho^{-1}(\tau)d\tau \le 3$ при $z\in\Delta^+(x)$.

Следовательно $\sup\limits_{x\in R}\mathrm{B}(x)\le 6$.

Лемма доказана.

Положим

$$\mathrm{B}_n(x)=r(x)\int\limits_z^\infty (s)^{n-1}\rho^{-1}(s)ds$$

Теорема 2. Вложение пространств $H_\infty^n\subset L_{\infty,r}$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{B}_n=\sup_{x>0}\mathrm{B}_n(x)<\infty \tag{10}$$

Для нормы оператора вложения $E:H_\infty^n\subset L_{\infty,r}$ имеет оценка

$$C^{-1}\mathrm{B}_n\le\|E\|\le C\mathrm{B}_n$$

где постоянная $C>0$ не зависит от r,ρ,υ.

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнено (10). Положим $\psi(t)=\rho_*(t)f^{(n)}(t)$.

Тогда

$$f(t)=\gamma\int\limits_t^\infty (s-t)^{n-1}\rho^{-1}(s)\psi(s)ds,\quad \gamma=\frac{(-1)^n}{(n-1)!}.$$

Рассмотрим интегральный оператор

$$\mathrm{A}\psi=\gamma r(t)\int\limits_t^\infty (s-t)^{n-1}\rho^{-1}(s)\psi(s)ds$$

из $L_\infty(R_+)$ в $L_\infty(R_+)$. Как известно [17, гл.2, теор. 4]

$$\|\mathrm{A}\|_{\infty\to\infty}=\gamma B_n$$

В силу (45) оператор A ограничен в L_∞, что равносильно выполнению неравенства

$$\|rf\|_\infty\le\gamma\mathrm{B}_n\left\|\rho_* f^{(n)}\right\|_\infty\quad \forall f\in AC^{n+1}\left(\overset{\circ}{R}_+\right)$$

Теперь, применяя лемму 2 убедимся, что имеет место вложение $H_\infty^n\subset L_{\infty,r}$ и $\|E\|\le K\gamma\mathrm{B}_n$.

Необходимость. Пусть оператор вложения $E:H_\infty^n\subset L_{\infty,r}$ непрерывен. Тогда

$$\|rf\|_\infty\le\|E\|\|f\|_{H_\infty^n}\quad f\in H_\infty^n \tag{11}$$

Пусть $z\in R_+$ произвольная фиксированная точка.

Пусть $R=\bigcup\limits_{i=-\infty}^{\infty}\Delta^+(z_i)$, причем $z_0=z$ и $z_{i+1}=z_i+d^+(z_i)$. В силу леммы 1

$$\int\limits_{\Delta^+(z_{i+1})}\rho^{-1}(\tau)d\tau\le 2\int\limits_{\Delta^+(z_i)}\rho^{-1}(\tau)d\tau \tag{12}$$

Введем функции

$$f_i(t)=f_{i,z}(t)=\begin{cases}\alpha_i\int\limits_{z_{i-1}}^{t}\rho^{-1}(\tau)d\tau & \text{при } z_{i-1}\le t\le z_i\\ \int\limits_{t}^{z_{i+2}}\rho^{-1}(\tau)d\tau & \text{при } \quad z_i\le t\le z_{i+2}\\ 0 \quad \text{при} \quad \mathrm{t}\,\overline{\in}\,[z_{i-1},z_{i+2}], & \end{cases}$$

где $\alpha_i=\left(\int\limits_{z_{i-1}}^{z_i}\rho^{-1}(\tau)d\tau\right)^{-1}\int\limits_{z_i}^{z_{i+2}}\rho^{-1}(\tau)d\tau$.

Для любого целого $m>0$ и $z\in R_+$ положим

$$\varphi_m(t)=\varphi_{z,m}(t)=\sum_{i=0}^{m}\int\limits_{t}^{\infty}(s-t)^{n-1}f_i(s)ds\,.$$

Тогда имеем

$$\int\limits_{t}^{\infty}(s-t)^{n-1}f_i(s)ds=\begin{cases}\alpha_i\int\limits_{z_{i-1}}^{z_i}(s-t)^{n-1}\int\limits_{z_{i-1}}^{S}\rho^{-1}(\tau)d\tau ds+\int\limits_{z_i}^{z_{i+2}}(s-t)^{n-1}\int\limits_{S}^{z_{i+2}}\rho^{-1}(\tau)d\tau ds, & t\le z_{i-1}\\ \alpha_i\int\limits_{t}^{z_i}(s-t)^{n-1}\int\limits_{z_{i-1}}^{S}\rho^{-1}(\tau)d\tau ds+\int\limits_{z_i}^{z_{i+2}}(s-t)^{n-1}\int\limits_{S}^{z_{i+2}}\rho^{-1}(\tau)d\tau ds, & z_{i-1}\le t\le z_i\\ \int\limits_{t}^{z_{i+1}}(s-t)^{n-1}\int\limits_{S}^{z_{i+2}}\rho^{-1}(\tau)d\tau ds, & z_i\le t\le z_{i+2}\\ 0, \quad t\ge z_{i+2} & \end{cases}$$

Пусть $t\in[0,\infty)$. Тогда существует $\Delta^+(z_{i_0})$ такой, что $t\in[z_{i_0},z_{i_0+1})$,

$$\rho(t)\sum_{i=0}^{\infty}|f_i'(t)|=\rho(t)|f_{i_0-1}'(t)|+\rho(t)|f_{i_0}'(t)|+\rho(t)|f_{i_0+1}'(t)|,$$

$$\upsilon(t)\sum_{i=0}^{\infty}|f_i(t)|=\upsilon(t)f_{i_0-1}(t)+\upsilon(t)f_{i_0}(t)+\upsilon(t)f_{i_0+1}(t)$$

Вычисления показывают $\rho(t)|f_{i_0-1}'(t)|=1,\quad \rho(t)|f_{i_0}'(t)|=1,\quad \rho(t)|f_{i_0+1}'(t)|=\alpha_{i+1}\le 6$

Последнее неравенство получено на основании (12). Итак

$$\left\|\rho(t)\sum_{i=0}^{\infty}f_i'(t)\right\|_{\infty}\le 8\,.$$

Таким же образом получаем

$$\left\|\upsilon(t)\sum_{i=0}^{m}f_i\right\|_{\infty}=\max_{0\le i\le\infty}\sum_{\kappa=-1}^{1}\|\upsilon f_{i+k}\|_{\infty}\le 10\,.$$

Тогда

$$\|\varphi_{z,m}\|_{H_\infty^n}\le 18(n-1)! \tag{13}$$

При $t\le z_i$ справедливо неравенство

$$\int_t^\infty (s-t)^{n-1} f_i(s)ds \ge \int_{z_i}^{z_{i+2}} (s-t)^{n-1} \int_S^{z_{i+2}} \rho^{-1}(\tau)d\tau ds \le \int_{z_i}^{z_{i+1}} (s-t)^{n-1} \int_S^{z_{i+2}} \rho^{-1}(\tau)d\tau ds \ge$$

$$\ge \int_{z_i}^{z_{i+1}} (s-t)^{n-1} \int_S^{S^+} \rho^{-1}(\tau)d\tau = \int_{z_i}^{z_{i+1}} (s-t)^{n-1} \rho_*^{-1}(s)ds$$

Пусть $t = z = z_0$. Тогда $t \le z_i \quad \forall i \ge 0$, поэтому

$$\varphi_{z,m}(t) = \sum_{i=0}^\infty \int_t^\infty (s-t)^{n-1} f_{i,z}(s)ds \ge \sum_{i=0}^\infty \int_{z_i}^{z_{i+1}} (s-z)^{n-1} \rho_*^{-1}(s)ds =$$

$$= \int_t^{z_{m+1}} (s-t)^{n-1} \rho_*^{-1}(s)ds \tag{14}$$

Из (11), (13), (14) имеем

$$r(t) \int_t^{z_{m+1}} (s-t)^{n-1} \rho_*^{-1}(s)ds \le r(t)\varphi_t(x) \le \sup_{x\ge 0} \left| r(x)\varphi_t(x) \right| \le$$

$$\le \|E\| \|\varphi_t\|_{H_\infty^n} \le 18(n-1)! \|E\|.$$

Откуда в силу произвольности $t = z \in R_+$ и $m > 0$

$$\mathrm{B}_n \le 18(n-1)! \|E\| < \infty$$

Теорема 2 доказана.

Следствие 1. Неравенство

$$\left\| r\varphi^{(k)} \right\|_\infty \le C \|\varphi\|_{H_\infty^n}, \quad \varphi \in AC^{n+1}\left(\overset{\circ}{R}_+ \right)$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$\sup_{x>0} r(x) \int_x^\infty (s-x)^{n-k-1} \rho_*^{-1}(s)ds < \infty$$

Следствие 2. Если $\int_0^\infty s^{n-1} \rho_*^{-1}(s)ds < \infty$, то

$$\forall f \in H_\infty^n \quad \lim_{x\to\infty} f^{(\kappa)}(x) = 0, \quad \kappa = 0,1,\ldots,n-1 .$$

Следствие 2 вытекает из следствия 1 и неравенства

$$\int_0^\infty s^k \rho_*^{-1}(s)ds \le \int_0^1 \rho_*^{-1}(s)ds + \int_1^\infty s^{n-1} \rho_*^{-1}(s)ds$$

Теорема 3. Вложение $H_\infty^n(R_+) \subset C_r(R_+)$ компактно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{B}_n(x) = 0$$

Доказательство. Необходимость. Пусть вложение $H_\infty^n(R_+) \subset C_r(R_+)$ компактно.

Тогда $\mathrm{B}_n < \infty$. Рассмотрим семейство функций $\mathrm{M} = \left\{ \varphi_{z,m}(\square), m > 0, z \in R_+ \right\}$. Из доказательства теоремы 2 следует, что $\forall z \in R_+ \ \|\varphi_{z,m}\|_{H_\infty^n} \le 18(n-1)!$. Следовательно множество $r\mathrm{M} = \left\{ r\varphi_{z,m}, m > 0, z \in R_+ \right\}$ предкомпактно в $C(R_+)$. На основании теоремы о компактности

ограниченного множества в $C(R_+)$, для $\varepsilon > 0$ существует конечноечисл $n = n(\varepsilon)$ и точек $\{\alpha_i\}^n \subset R_+$ такие, что $R_+ = \bigcup_{i=1}^{n} [\alpha_i, \alpha_{i+1}], \alpha_1 = 0, \alpha_{n+1} = \infty$,

$$\sup_{\varphi \in r\mathrm{M}} \sup_{x,y \in [\alpha_i, \alpha_{i+1})} \left| r(x)\varphi(x) - r(y)\varphi(y) \right| < \varepsilon \quad \forall i = \overline{1,n} \tag{15}$$

Пусть $R_\eta = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \Delta^+(z_k), z_0 = z \in [\alpha_n, \infty)$.

Положим $x = z_{m+2}$, $y = z$. Тогда $r(x)\varphi_{z,m}(x) = 0$ так как $\int_x^\infty (s-x)^{n-1} f_{i,z}(s)ds = 0$ при $z_{m+2} = x \geq z_{i+2}$, $i = 0,1,\ldots,m$

Из (14), (15) имеем

$$\varepsilon > \left| r(x)\varphi_{y,m}(x) - r(y)\varphi_{y,m}(y) \right| = r(y) \sum \int_y^\infty (s-y)^{n-1} f_{i,y}(s)ds \geq$$

$$\geq r(y) \int_y^{z_{m+1}} (s-y)^{n-1} \rho_*^{-1}(s)ds.$$

Откуда в силу произвольности $m > 0$

$$r(y) \int_y^\infty (s-y)^{n-1} \rho_*^{-1}(s)ds < \varepsilon \text{ при } y > \alpha_n(\varepsilon)$$

т.е. $\lim_{y\to\infty} \mathrm{B}_n(y) = 0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполнено условие $\lim_{x\to\infty} \mathrm{B}_n(y) = 0$.

Тогда для $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $x > N$ $\mathrm{B}_n(x) < \varepsilon$. Из – за непрерывности составляющих, $\mathrm{B}_n(x)$ непрерывна на отрезке $[0,N]$ и поэтому ограничена на нем $\sup_{x\in[0,N]} \mathrm{B}_n(x) \leq C$.

Следовательно $\sup_{x\in R_+} \mathrm{B}_n(x) < \infty$. Тогда по теореме 2 имеет место непрерывное вложение $H_\infty^n \subset C_r$.

Пусть S - единичный шар в H_∞^n. Тогда применяя теорему 2 на интервале $[N,\infty)$ получаем

$$\begin{aligned} &\sup_{\varphi\in S} \sup_{x,y\in[N,\infty)} \left| r(x)\varphi(x) - r(y)\varphi(y) \right| \leq 2\sup_{\varphi\in S} \|r\varphi\|_{\infty,[N,\infty)} \leq \\ &\leq C \sup_{x,y\in[N,\infty)} \mathrm{B}_n(x) \|\varphi\|_{H_\infty^n} \leq C\varepsilon \end{aligned} \tag{16}$$

Из равномерной непрерывности функции $r(\cdot)$на$[0,N]$ для $\varepsilon > 0$ существует $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$ и $|r(x) - r(y)| \leq \varepsilon$ при $|x-y| \leq \delta_1$, $x,y \in [0,N]$.

Из условия (10) $\int_0^\infty S^{n-1}\rho_*^{-1}(s)ds < \infty$. Поэтому на основании следствия 2 теоремы 2 $\forall \varphi \in H_\infty^n$

$$\lim_{S\to\infty} \varphi^{(k)}(s) = 0, \; k = 0,1,2,\ldots,n-1.$$

Далее для $\varphi \in S$, $x,y \in [0,N]$

$$\left|\varphi(x)-\varphi(y)\right|=\frac{1}{(n-1)!}\left|\int_y^\infty (s-y)^{n-1}\varphi^{(n)}(s)ds-\int_x^\infty (s-x)^{n-1}\varphi^{(n)}(s)ds\right|=$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\left|\int_y^x (s-y)^{n-1}\varphi^{(n)}(s)ds+\int_x^\infty\left[(s-y)^{n-1}-(s-x)^{n-1}\right]\varphi^{(n)}(s)ds\right|\le$$

$$\le\frac{1}{(n-1)!}\left|\int_y^x (s-y)^{n-1}\varphi^{(n)}(s)ds\right|+\frac{1}{(n-1)!}\left|\sum_{k=1}^{n-1}C_k^{n-1}(x-y)^k\int_y^x (s-y)^{n-k-1}\varphi^{(n)}(s)ds\right|\le$$

$$\le\frac{1}{(n-1)!}\left|\int_y^x (s-y)^{n-1}\rho_*^{-1}(s)ds\right|\left\|\rho_*\varphi^{(n)}\right\|_\infty+\frac{1}{(n-1)!}\left|\sum_{k=1}^{n-1}C_k^{n-1}|x-y|^k\right|\cdot$$

$$\cdot\int_x^\infty (s-x)^{n-k-1}\rho_*^{-1}(s)ds\left\|\rho_*\varphi^{(n)}\right\|_\infty\le\frac{1}{(n-1)!}\int_y^x (s-y)^{n-1}\rho_*^{-1}(s)ds\|\varphi\|_{H_\infty^n}+$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{n-1}C_k^{n-1}|x-y|^k\int_x^\infty (s-x)^{n-k-1}\rho_*^{-1}(s)ds\|\varphi\|_{H_\infty^n}\le$$

$$\le\frac{1}{(n-1)!}\left|\int_y^x (s-y)^{n-1}\rho_*^{-1}(s)ds\right|+\frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{n-1}C_k^{n-1}|x-y|^k\int_0^\infty S^{n-k-1}\rho_*^{-1}(s)ds=\theta(x,y)$$

Из условия (10) следует, что

$$\int_0^\infty S^{n-1}\rho_*^{-1}(s)ds<\infty .$$

Поэтому

$$\int_0^\infty S^{n-\kappa-1}\rho_*^{-1}(s)ds\le\int_0^1\rho_*^{-1}(s)ds+\int_1^\infty S^{n-1}\rho_*^{-1}(s)ds<\infty .$$

Выберем $0<\delta\le\delta_1$ так, чтобы при $|x-y|\le\delta$ выполнялось неравенство $\theta(x,y)\le\varepsilon$. Тогда $|\varphi(x)-\varphi(y)|\le\varepsilon$.

Пусть $[0,N]=\bigcup_{i=1}^{m-1}[\alpha_i,\alpha_{i+1}]$, причем $\alpha_{i+1}-\alpha_i\le\delta$.

Тогда

$$\sup_{\varphi\in S}\sup_{x,y\in[\alpha_i,\alpha_{i+1})}\left|r(x)\varphi(x)-r(y)\varphi(y)\right|\le$$

$$\sup_{\varphi\in S}\sup_{x,y\in[\alpha_i,\alpha_{i+1})}\left|r(x)\right|\left|\varphi(x)-\varphi(y)\right|+\sup_{\varphi\in S}\sup_{x,y\in[\alpha_i,\alpha_{i+1})}\left|\varphi(y)\right|\left|r(x)-r(y)\right|\le$$

$$\le\varepsilon\left(\sup_{x\in[0,N]}\left|r(x)\right|+\sup_{\varphi\in S}\sup_{y\in[0,N]}\left|\varphi(y)\right|\right) \tag{17}$$

Из теоремы 2 следует

$$\sup_{\varphi\in S}\sup_{y\in[0,N]}\left|\varphi(y)\right|\le\sup_{\varphi\in S}\|\varphi\|_\infty\le\int_0^\infty S^{n-1}\rho_*^{-1}(s)ds\square\|\varphi\|_{H_\infty^n}\le\int_0^\infty S^{n-1}\rho_*^{-1}(s)ds$$

Поэтому из (16), (17) на основании теоремы о предкомпактности ограниченного множества в $C(R_+)$ следует, что S предкомпактно в C_r. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Блялов Ш. Об одном весовом вложений // Изв. АН Каз ССР. Сер. физ.-мат. 1988. №5. С. 17 – 21.

[2] Блялов Ш. Об одном трехвесовом вложений // Деп. в ВИНИТИ. 1988. №4834 – В88. 21 с.

[3] Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.

[4] Кудрявцев Л.Д. Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений// Тр. МИАН СССР. 1959. Т. 55. С. 1-181.

[5] Куфнер А., Опиц Б. и др. Точные теоремы вложения для одного класса весовых пространствС.Л. Соболева// ДАН УССР. 1988. №1. С. 22-26.

[6] Лизоркин. П.Н., Отелбаев М. Теоремы вложения и компактности для пространств соболевского типа с весами // Мат. Сб. 1979. Т. 108. №3. С. 358-377 (4.1); Мат. Сб. 1980. Т. 112. №1. С. 56-85 (4.11)

[7] Лизоркин П.И., Никольский С.М. Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением и обобщенной правой частью // Тр. МИ АН СССР. 1983. Т.161. С. 157-183.

[8] Мазья В.Г. Пространства Соболева. Л. : Изд-во ЛГУ, 1985.

[9] Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир. 1971. 372 с.

[10] Бирман М.Ш., Павлов В.С. О полной непрерывности некоторых операторов вложения // Вестн. ЛГУ. Математика. Механика. Астрология. 1961. №1, С. 61-74.

[11] Отелбаев М. Теоремы вложения пространств с весом и их применения к изучению спектра оператора Шредингера // Тр. МИ АН СССР. 1979. Т. 150. С. 265-305.

[12] Мынбаев К.Т., Отелбаев М. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. М.: Наука, 1988, 288 с.

[13] Похожаев С.И. Вложение нелинейных операторов и априорные оценки решений нелинейных уравнений // ДАН СССР. 1982. Т. 266. №5. С. 1063-1066.

[14] Буренков В.Н. ТеоремаоповторныхнормахдляпространствНикольского – Бесоваиеёприменение // Тр. МИАН. 1980. Т. 181. С. 27-39.

[15] Бойматов К.Х. О некоторых весовых пространствах. – Вкн.: Функц. анализ и его прилож. ктеор. вес. 1984. М.: МГУ. С. 119-120.

[16] Степанов В.Д. О весовом неравенстве Харди //Сиб. Мт.журнал. 1987. Т. 28. №3. С. 205-207.

[17] Конторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.

[18] Г. Харди, Дж.Е. Литтльвуд, Г. Полиа. Неравенства. М.: ИЛ. 1948.

[19] Ойнаров Р., Отелбаев М. Критерий дискретности спектр общего оператора Штурма – Лиувилла и теоремы вложения, связанные с ним. // Диф. уравнения. 1988. Т. 24. №4ю С. 584-591.

[20] Ойнаров Р. О плотности финитных функций в весовых пространствах и весовые неравенсва// ДАН СССР. 1988. Т. 303. №3. С.

[21] Ойнаров Р. Дуальное неравенство к аддитивной оценке матричного оператора // Труды межд. конф. “Современное состояние и перспектива развития математики в рамках программы “Казахстан в третьем тысячелетии”” 2001. – С. 111-115.

[22] Oinarov R., Temirkhanova A.M. Boundednessofn – multiplediscrete Hardyoperatorswithweightedsequencespaces // J. Math/Ineq/ - 2008. – V. 2. №4. – P. 555-570.

[23] OinarovR., OkrotiC.A., PersonL. E. Weighted inequalities of Hardy type for matrix operators: the case $q < p$ // Math. Inequal. Appl. – 2007. №4. – P. 843 – 861.

[24] Taspaganbetova Zh. Two – sided estimates for matrix operators on the core of monotone sequences // J. Math. Anal. – 2014. – V. 410.

[25] Taspaganbetova Zh. Temirkhanova A.M. Boundedness and Compactness criteria of a certain class of matrix operators // Математическийжурнал. – 2011. Т. 11, №2(40). – С. 73-85.

[26] Taspaganbetova Zh., Temirkhanova A.M. Criteria on boundedness of matrix operators in weighted spaces of sequences and their applications // Annals of functional Analysis. – 2011. T. 2, №1. – C. 114-127.

REFERENCES

[1] Blyalov Sh. A weight attachment // Math. AN Kazakh SSR. Ser. phys - mat. 1988. №5. S. 17 - 21.

[2] Blyalov Sh. A three weight attachment // Dep. VINITI. 1988. №4834 - V88. 21.

[3] Nikolsky S.M. Approximation of functions of several variables and embedding theorems. M .: Nauka, 1977.

[4] Kudryavtsev L.D. Direct and inverse imbedding theorems. Applications to the solution of the variational method of elliptic equations // Tr. Steklov. 1959. T. 55. S. 1-181.

[5] Kufner A., Opitz B. et al. Exact embedding theorem for a class of weighted spaces C.L. Sobolev // Dokl. 1988. №1. S. 22-26.

[6] Lizorkin. P.N., Otelbaev M. Embedding theorems and compactness for spaces of Sobolev type with weights // Mat. Coll. 1979. T. 108. №3. Pp 358-377 (4.1); Mat. Coll. 1980. T. 112. №1. Pp 56-85 (4.11)

[7] Lizorkin P.I., Nikol'skii S.M. Coercive properties of an elliptic equation with degeneration and a generalized right-hand side // Tr. MI USSR. 1983 T.161. Pp 157-183.

[8] Maz'ya V.G. Sobolev spaces. AL: Leningrad State University, 1985.

[9] Lions J.L., Magenes E. Heterogeneous boundary value problems and their applications. M .: Mir. 1971. 372 p.

[10] Birman M.Sh., Pavlov V.S. On the complete continuity of certain imbedding operators // Vestn. LSU. Mathematics. Mechanics. Astrology. 1961. №1, pp 61-74.

[11] M. Otelbaev. Imbedding theorems for spaces with weight and their application to the study of the spectrum of the Schrödinger operator // Tr. MI USSR. T. 1979. 150 pp 265-305.

[12] Mynbayev KT, Otelbaev M. Weighted function spaces and a range of differential operators. M .: Nauka, 1988, 288 p.

[13] Pokhozhaev S.I. Attachment of nonlinear operators and a priori estimates of the solutions of nonlinear equations // Dokl. 1982. Vol. 266. №5. P. 1063-1066.

[14] Burenkov V.N. A theorem on iterated norms for Nikol'skij - Besov and its application // Tr. Mat. T. 1980. 181 pp 27-39.

[15] Boymatov K.H. On some weighted spaces. - WPC .: Functional analysis and its application on the weight theory. 1984. M .: MGU. Pp 119-120.

[16] Stepanov V.D. About the weighted Hardy inequality // Sib. Mt.zhurnal. 1987. V. 28. №3. Pp 205-207.

[17] Kontorovich L.V., Akilov G.P. Functional Analysis. M .: Nauka, 1977. 744 p.

[18] G. Hardi, J.E. Littlewood, G. Polya. Neravenstva. M.: IL. 1948.

[19] Oinarov R., Otelbaev M. Discreteness criterion for the spectrum of the total of the Sturm - Liouville theorem and investments associated with it. // Diff. equation. 1988. Vol. 24. №4 P. 584-591.

[20] Oinarov R. On the density of finite functions in weighted spaces, and the weight of unequal // Dokl. 1988. Vol. 303. №3. FROM.

[21] Oinarov R. The dual inequality addition to the assessment matrix operator // Proceedings of Int. Conf. "Current state and prospects of development of mathematics in the framework of the program" Kazakhstan in the third millennium "," 2001 -P. 111-115.

[22] Oinarov R., Temirkhanova A.M. Boundednessofn – multipledisсrete Hardyoperatorswithweightedsequencespaces // J. Math/Ineq/ - 2008. – V. 2. №4. – P. 555-570.

[23] Oinarov R., Okroti C.A., Persson L. E. Weighted inequalities of Hardy type for matrix operators: the case $q < p$ // Math. Inequal. Appl. – 2007. №4. – P. 843 – 861.

[24] Taspaganbetova Zh. Two – sided estimates for matrix operators on the core of monotone sequences // J. Math. Anal. – 2014. – V. 410.

[25] Taspaganbetova Zh. Temirkhanova A.M. Boundedness and Compactness criteria of a certain class of matrix operators // Matematical j. – 2011. T. 11, №2(40). – pp. 73-85.

[26] Taspaganbetova Zh. TemirkhanovaA.M. Criteria on boundedness of matrix operators in weighted spaces of sequences and their applications // Annals of functional Analysis. – 2011. T. 2, №1. – pp. 114-127.

ЖҮКТЕЛГЕНФУНКЦИОНАЛДЫҚ ТЕҢСІЗДІКТЕР ТУРАЛЫ

Ш. Біләл, А. Б. Даржанова

ҚР БҒМ Математика және математикалық үлгілеу институты, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: жүктелген теңсіздіктер, ену, жинақылық, кеңістіктер.

Аннотация. Функционалдық талдауда “функционалдық кеңістіктердің ену теоремалары” атты жаңа бағыттың пайда болуымен дефференциалдық және интегралдық операторлардың көптеген сапалық қасиеттерің зерттеу – сәйкес әр түрлі қасиеттерге ие ену теоремаларын орнықтырумен пара – пар келетіндігі анықталды. Ерекше, мұндай тәсіл сингуляр операторлармен жүктелген кеңістіктердің ену теоремалары қасиеттерін орнықтыруда жемісті нәтижелер береді. Бұл мақалада жүктелген кеңістіктердің енуі, белгілі ретті абсолют – үзіліссіз туындылары бар функциялар кеңістігінің Лебег кеңістігіне енуі немесе Харди типтес жүктелген теңсіздіктерді бағалау қарастырылған. Харди типтес теңсіздіктің орындалу немесе аталған кеңістіктердің енуінінің қажетті және жеткілікті шарттары алынды. Реті бойынша теңескен екіжақты бағалар да алынды. Ену операторы жинақылығыныың критериі берілді. Бұл жерде коэффициентерінің әрекеттеріне байланысты еңгізілген зерттеу нысандарын “сипаттамалық” аралықта түбегейлі зерттеуге негізделген төңіректеу әдісі қолданылады. Мұндай тектес зерттеулердің жемісті әдістерінің бірі М. Отелбаевқа тиесілі. Біз де соны пайданаланамыз. Сонымен қатар бұл жұмыстың нәтижелері Р. Ойнаров жұмысы нәтижелерін толықтыра түседі.

Поступила 07.07.2015 г.