N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 4, Number 302 (2015), 167 – 172

ABOUT ONE NECESSARY SIGN OF FREQUENCY RATE OF OWN VALUES OF THE OPERATOR OF STORM LIOUVILLE

A. B. Imanbaeva, S. T. Ahmetova, A. Sh. Shaldanbaev

M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan.
E-mail: shaldanbaev51@mail.ru

Keywords: own values, frequency rate of a range, operator Shturma-Liuvillya.

Abstract. Problem definition. Many problems of a mathematical task give to a task definitions of own values and own functions of differential operators and decomposition of any function in a row (or integral) on own functions. So, for example, to such questions come always, applying Fourier's method to finding of the solution of the differential equation in private derivatives meeting these entry and regional conditions. Therefore differential operators attracted, both draw great attention and there are many works by it devoted.

Despite the fundamental results received so far the problem of spectral decomposition of differential operators still can't be considered settled. Here first of all it is necessary to point to a problem of determination of frequency rate of a range of the differential operator depending on properties of his coefficients [1].

Let Gilbert's space, - the operator Shturma-Liuvillya determined by conditions:

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x) = zy(x), \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}y(0) + a_{12}y'(0) + a_{13}y(1) + a_{14}y'(1) = 0, \\ a_{21}y(0) + a_{22}y'(0) + a_{23}y(1) + a_{24}y'(1) = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

If for some own value of this operator there correspond two own functions, such own value is called multiple. It is asked what have to be coefficients of a regional condition (1.2) that the operator (1.1)-(1.2) had at least one multiple own value.

УДК 517.91

ОБ ОДНОМ НЕОБХОДИМОМ ПРИЗНАКЕ КРАТНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

А. Б. Иманбаева, С. Т. Ахметова, А. Ш. Шалданбаев

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

Ключевые слова: собственные значения, кратность спектра, оператор Штурма-Лиувилля.

Аннотация. В настоящей работе установлен один признак кратности собственного значения оператора Штурма-Лиувилля.

1. Введение.

Постановка задачи. Многие задачи математической задачи приводят к задаче определения собственных значений и собственных функций дифференциальных операторов и разложения произвольной функции в ряд (или интеграл) по собственным функциям. Так, например, к такого рода вопросам приходят всегда, применяя метод Фурье для нахождения решения дифференциального уравнения в частных производных, удовлетворяющего данным начальным и краевым условиям. Поэтому дифференциальные операторы привлекали, и привлекают большое внимание и имеется много работ им посвященных.

Несмотря на фундаментальные результаты полученные до настоящего времени, проблему спектрального разложения дифференциальных операторов еще нельзя считать исчерпанной. Здесь в первую очередь следует указать на задачу определения кратности спектра дифференциального оператора в зависимости от свойств его коэффициентов [1].

Пусть $H = L^2(0,1)$ пространство Гильберта, L- оператор Штурма-Лиувилля, определенный условиями:

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x) = zy(x), \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}y(0) + a_{12}y'(0) + a_{13}y(1) + a_{14}y'(1) = 0, \\ a_{21}y(0) + a_{22}y'(0) + a_{23}y(1) + a_{24}y'(1) = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Если для некоторого собственного значения λ_0 этого оператора соответствуют две собственные функции, то такое собственное значение называется кратным. Спрашивается, какими должны быть коэффициенты краевого условия (1.2), чтобы оператор (1.1)-(1.2) имел хотя бы одного кратного собственного значения.

2. Методы исследований. Рассмотрим в пространстве $L^2(0,1)$ спектральную задачу

$$Ly = y'(1-x) = \lambda y(x), x \in (0,1) \tag{2.1}$$

$$\alpha y(0) + \beta y(1) = 0, \tag{2.2}$$

где α, β- произвольные комплексные числа. λ- с пектральный параметр. Сначала найдем общего решения уравнения (2.1) и изучим ее свойства. Имеет место следующая лемма [2].

Лемма 2.1.

(а) Пространство решений уравнения (2.1) одномерно;

(б) Общее решение уравнения (2.1) имеет следующий вид

$$y(x,\lambda) = C\left[\cos\lambda\left(x-\frac{1}{2}\right) + \sin\lambda\left(x-\frac{1}{2}\right)\right], C - const. \tag{2.3}$$

(в) Для любого нетривиального решения уравнения (2.1) имеет место формула

$$y(1-x,\lambda) = y(x,-\lambda). \tag{2.4}$$

(г) Если $y(x,\lambda)$ есть решение уравнения (2.1) и

$$z(x,\lambda) = y(1-x,\lambda),$$

то

$$z'(1-x) = -\lambda z(x). \tag{2.5}$$

(д) Если $\lambda \neq 0$, то пара $\varphi(x,\lambda), \varphi(x,-\lambda)$ образует базис решений уравнения Штурма-Лиувилля:

$$-y''(x) = \lambda^2 y(x), x \in (0,1), \tag{2.6}$$

где

$$\varphi(x,\lambda) = \cos\lambda\left(x-\frac{1}{2}\right) + \sin\lambda\left(x-\frac{1}{2}\right), \tag{2.7}$$

есть решение уравнения (2.1). Вронскиан этой пары вычисляется по формуле

$$W[\varphi(x,\lambda), \varphi(x,-\lambda)] = -2\lambda; \tag{2.8}$$

(е) Если $\psi(x,\lambda) = \varphi(x,-\lambda)$, то пара

$$z_1(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda) - \psi(x,\lambda), z_2(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda) + \psi(x,\lambda) \tag{2.9}$$

образует базис в пространстве решений уравнения Штурма-Лиувилля (2.6), причем

$$z_1(1-x,\lambda) = -z_1(x,\lambda);\ z_1(0) = -z_1(1),\ z'_1(0) = z'_1(1);$$

$$z_2(1-x,\lambda) = z_2(x,\lambda);\ z_2(0) = z_2(1),\ z'_2(0) = -z'_2(1). \tag{2.10}$$

Эта лемма играет ключевую роль во всех наших дальнейших исследованиях, одним из следствий этой леммы является следующая

Лемма 2.2. Если оператор Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x) = \lambda^2 y(x), \tag{2.11}$$

$$\begin{cases} a_{11}y(0) + a_{12}y'(0) + a_{13}y(1) + a_{14}y'(1) = 0, \\ a_{21}y(0) + a_{22}y'(0) + a_{23}y(1) + a_{24}y'(1) = 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

имеет хотя бы одного кратного собственного значения, отличного от нуля, т.е. $\lambda_0 \neq 0$, то имеет место равенства

$$\Delta_{12} - \Delta_{34} = 0, \Delta_{14} + \Delta_{23} = 0, \tag{2.13}$$

где Δ_{ij} - минор составленный из -го и j-го столбцов матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

составленный и коэффициентов граничного условия (2.12).

С помощью другого базиса получена следующая лемма 2.3, которые уточняют предыдущую лемму 2.2.

Лемма 2.3. Если оператор Штурма-Лиувилля (2.11)-(2.12) имеет хотя бы одно кратное собственное значение λ_0^2, отличное от нуля, то имеет место равенства

$$\begin{aligned} &1)\ \Delta_{12} - \Delta_{34} = 0; \\ &2)\ \Delta_{14} + \Delta_{23} = 0; \\ &3)\ \lambda_0^2 \cdot \Delta_{42} + \Delta_{13} = 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Предположим, что оператор Штурма-Лиувилля имеет не менее двух кратных собственных значений, отличных от нуля, тогда из равенств

$$\lambda_0^2 \cdot \Delta_{42} + \Delta_{13} = 0, \lambda_1^2 \cdot \Delta_{42} + \Delta_{13} = 0$$

выводим, что $(\lambda_0^2 - \lambda_1^2)\Delta_{42} = 0, \Rightarrow \Delta_{42} = 0, \Delta_{13} = 0.$

Таким образом, имеет место следующая лемма 2.4.

Лемма 2.4. Если оператор Штурма-Лиувилля имеет не менее двух кратных собственных значений, отличных от нуля, то имеет место равенства

$$\begin{aligned} &1)\ \Delta_{12} - \Delta_{34} = 0; \\ &2)\ \Delta_{14} + \Delta_{23} = 0; \\ &3)\ \Delta_{42} = \Delta_{13} = 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Определение 2.1. Оператор Штурма-Лиувилля (2.11)-(2.12) называется вырожденным, если ее спектр пуст или вся комплексная λ- плоскость.

Лемма 2.5 [3]. Оператор Штурма-Лиувилля (2.11)-(2.12) вырожден тогда и только тогда, когда

$$|\Delta_{42}| + |\Delta_{14} + \Delta_{32}| + |\Delta_{13}| = 0. \tag{2.17}$$

3. Результаты исследований

Теорема 3.1. Если оператор Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x) = \lambda^2 y(x), x \in (0,1),$$

$$\begin{cases} a_{11}y(0) + a_{12}y'(0) + a_{13}y(1) + a_{14}y'(1) = 0, \\ a_{21}y(0) + a_{22}y'(0) + a_{23}y(1) + a_{24}y'(1) = 0 \end{cases}$$

с линейно независимыми краевыми условиями, имеет не менее двух, отличных от нуля, кратных собственных значений, то граничное условие такого оператора имеет вид

$$y(0) = ky(1), y'(0) = ky'(1), \tag{2.18}$$

где $k^2 = 1$.

Доказательство. По нашему предположению оператор Штурма-Лиувилля имеет не менее двух кратных собственных значений. Известно, что спектр вырожденного оператора либо пуст, либо вся комплексная λ плоскость, причем все они являются однократными собственными значениями. Таким образом,

$$|\Delta_{14} + \Delta_{32}| \neq 0. \tag{2.19}$$

Следовательно, ни один из Δ_{14}, Δ_{32} не обращается в нуль.

Выводим граничного условия, удовлетворяющего всем этим требованиям. Из условия $\Delta_{14} \neq 0$ следует, что

$$\begin{cases} a_{11}y(0) + a_{12}y'(0) + a_{13}y(1) + a_{14}y'(1) = 0, \\ a_{21}y(0) + a_{22}y'(0) + a_{23}y(1) + a_{24}y'(1) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}y(0) + a_{14}y'(1) = -a_{12}y'(0) - a_{13}y(1), \\ a_{21}y(0) + a_{24}y'(1) = -a_{22}y'(0) - a_{23}y(1). \end{cases}$$

Решим эту систему уравнений относительно $y(0)$, $y'(1)$, методом Крамера.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -a_{12}y'(0) - a_{13}y(1), & a_{14} \\ -a_{22}y'(0) - a_{23}y(1), & a_{24} \end{vmatrix} = \Delta_{42}y'(0) + y(1)\Delta_{43};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11}, & -a_{12}y'(0) - a_{13}y(1) \\ a_{21}, & -a_{22}y'(0) - a_{23}y(1) \end{vmatrix} = \Delta_{21}y'^{(0)} + y(1)\Delta_{31}.$$

Следовательно, имеет место равенства

$$y(0) = \frac{\Delta_{42}}{\Delta_{14}}y'(0) + \frac{\Delta_{43}}{\Delta_{14}}y(1),$$
$$y'(1) = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{14}}y'(0) + \frac{\Delta_{31}}{\Delta_{14}}y(1).$$

В нашей ситуации $\Delta_{42} = \Delta_{13} = 0$, поэтому

$$y(0) = \frac{\Delta_{43}}{\Delta_{14}}y(1), y'(1) = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{14}}y'(0).$$

В силу пункта 1) леммы 2.3 имеет место равенство $\Delta_{12} = \Delta_{34}$, поэтому

$$\frac{\Delta_{43}}{\Delta_{14}} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{14}} = k.$$

Следовательно, граничное условие примет вид

$$y(0) = ky(1), y'(1) = ky'(0), \tag{2.20}$$

Аналогично из условия $\Delta_{23} \neq 0$ выводим, что

$$y'(0) = ky'(1), y(1) = ky(0). \tag{2.21}$$

Сравнивая формул (2.20) и (2.21), получим

$$y(0) = ky(1) = k^2(0), y'(1) = ky'(0) = k^2y'(1).$$

Если $k = 0$, то $y(0) = y'(0) = 0$, тогда по теореме единственности решения задачи Коши, получим $y \equiv 0$, поскольку речь идет о нетривиальных решениях, то $k \neq 0$ и $k^2 = 1$.

4. Выводы. Результаты данной работы могут быть использованы в спектральной теории операторов [2-15].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Наймарк М.А. Линейные дифференциональные операторы.- М.: Наука, 1969, 526с.

[2] Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. К спектральной теории уравнений с отклоняющимися аргументами.// Математический журнал, Алматы- 2004, т.4, №3, 41-48с.

[3] Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. О структуре спектра краевой задачи Штурма-Лиувилля на конечном отрезке времени.-//Известия АН РК, серия физ.-мат., Алматы-2000, 29-34с.

[4] Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. О полноте собственных векторов задачи Коши. - Республиканский научный журнал «Наука и образования ЮК» № 27, 2002. с. 58-62.

[5] Шалданбаев А.Ш. Об операторах симметрии. - Республиканская научная конференция "Дифференциальные уравнения и теория колебаний" – Алматы, 10-12 октября 2002г, с. 81-84.

[6] Шалданбаев А.Ш., Аширбекова К.Ш. О кратности спектра оператора Штурма-Лиувилля. Республиканская научная конференция "Дифференциальные уравнения и теория колебаний". – г. Алматы, 10-12 октября 2002г., с. 84-86.

[7] Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. О полноте собственных векторов периодической и антипериодической задачи. - Республиканский научный журнал «Наука и образование ЮК» №34, 2003г, - с. 25-30.

[8] Шалданбаев А.Ш., Аширбекова Ж.Ш. Об одном необходимом признаке симметрии задачи Штурма-Лиувилля. - Республиканский научный журнал «Наука и образование ЮК» №34, 2003г, - с. 133-136.

[9] Шалданбаев А.Ш. Необходимое и достаточное условие существования сильного решения для параболического уравнения с обратным течением времени. - КазНУ им. АльФараби «Вестник», г. Алматы, №2 (53), 2007. – с.58-72.

[10] Шалданбаев А.Ш. О формулах следов одного класса операторов Штурма-Лиувилля. - Башкирский Государственный Университет, «Вестник», том 14, №2, 2009. – с.351-355.

[11] Шалданбаев А.Ш. О сингулярно возмущенной задаче Коши в пространстве $L^2(0,1)$. // Математический журнал. г.Алматы, 2008, т.8, №4(30), с. 88-97.

[12] Шалданбаев А.Ш. Решение сингулярно возмущенной задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами методом отклоняющегося аргумента. // Вестник КазНУ, серия мат.-мех., инф., 2010г, №1, с. 85-87.

[13] Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. Об одном рекуррентном методе решения сингулярно сингулярно возмущенной задачи Коши для уравнения второго порядка. // Математические труды. г.Новосибирск. 2010, т.13, №2, с. 128-138.

[14] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction. Iournal of Jnverse and ill- posed problems.2010,v18,№4,p.352-369.

[15] Шалданбаев А.Ш. Спектральные разложения корректных-некорректных начально краевых задач для некоторых классов дифференциальных уравнений.- 193с, LAP LAMBEPT Academic Pyblishing. http://dnb.d-nb.de. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011,Germanu.

REFERENCES

[1] Najmark M.A. Linejnye differencional'nye operatory.- M.: Nauka, 1969, 526s.

[2] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh., Ahmetova S.T. K spektral'noj teorii uravnenij s otklonjajushhimisja argumentami.// Matematicheskij zhurnal, Almaty- 2004, t.4, №3, 41-48s.

[3] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. O strukture spektra kraevoj zadachi Shturma-Liuvillja na konechnom otrezke vremeni.-//Izvestija AN RK, serija fiz.-mat., Almaty-2000, 29-34s.

[4] Shaldanbaev A.Sh., Ahmetova S.T. O polnote sobstvennyh vektorov zadachi Koshi. - Respublikanskij nauchnyj zhurnal «Nauka i obrazovanija JuK» № 27, 2002. s. 58-62.

[5] Shaldanbaev A.Sh. Ob operatorah simmetrii. - Respublikanskaja nauchnaja konferencija "Differencial'nye uravnenija i teorija kolebanij" – Almaty, 10-12 oktjabrja 2002g, s. 81-84.

[6] Shaldanbaev A.Sh., Ashirbekova K.Sh. O kratnosti spektra operatora Shturma-Liuvillja. Respublikanskaja nauchnaja konferencija "Differencial'nye uravnenija i teorija kolebanij". – g. Almaty, 10-12 oktjabrja 2002g., s. 84-86.

[7] Shaldanbaev A.Sh., Ahmetova S.T. O polnote sobstvennyh vektorov periodicheskoj i antiperiodicheskoj zadachi. - Respublikanskij nauchnyj zhurnal «Nauka i obrazovanie JuK» №34, 2003g, - s. 25-30.

[8] Shaldanbaev A.Sh., Ashirbekova Zh.Sh. Ob odnom neobhodimom priznake simmetrii zadachi Shturma-Liuvillja. - Respublikanskij nauchnyj zhurnal «Nauka i obrazovanie JuK» №34, 2003g, - s. 133-136.

[9] Shaldanbaev A.Sh. Neobhodimoe i dostatochnoe uslovie sushhestvovanija sil'nogo reshenija dlja parabolicheskogo uravnenija s obratnym techeniem vremeni. - KazNU im. Al'Farabi «Vestnik», g. Almaty, №2 (53), 2007. – s.58-72.

[10] Shaldanbaev A.Sh. O formulah sledov odnogo klassa operatorov Shturma-Liuvillja. - Bashkirskij Gosudarstvennyj Universitet, «Vestnik», tom 14, №2, 2009. – s.351-355.

[11] Shaldanbaev A.Sh. O singuljarno vozmushhennoj zadache Koshi v prostranstve $L^2(0,1)$. // Matematicheskij zhurnal. g.Almaty, 2008, t.8, №4(30), s. 88-97.

[12] Shaldanbaev A.Sh. Reshenie singuljarno vozmushhennoj zadachi Koshi dlja sistemy obyknovennyh differencial'nyh uravnenij s peremennymi kojefficientami metodom otklonjajushhegosja argumenta. // Vestnik KazNU, serija mat.-meh., inf., 2010g, №1, s. 85-87.

[13] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. Ob odnom rekurrentnom metode reshenija singuljarno singuljarno vozmushhennoj zadachi Koshi dlja uravnenija vtorogo porjadka. // Matematicheskie trudy. g.Novosibirsk. 2010, t.13, №2, s. 128-138.

[14] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction. Iournal of Jnverse and ill- posed problems.2010,v18,№4,p.352-369.

[15] Shaldanbaev A.Sh. Spektral'nye razlozhenija korrektnyh-nekorrektnyh nachal'no kraevyh zadach dlja nekotoryh klassov differencial'nyh uravnenij.- 193c, LAP LAMBEPT Academic Pyblishing. http://dnb.d-nb.de. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011,Germanu.

ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЫНЫҢ МЕНШІКТІ МӘНДЕРІНІҢ ЕСЕЛІ БОЛУЫНЫҢ БІР БЕЛГІСІ ТУРАЛЫ

А. Б. Иманбаева, С. Т. Ахметова, А. Ш. Шалданбаев

М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан

Тірек сөздер: меншікті мәндер,спектрдің еселігі, Штурм-Лиувилл операторы.

Аннотация. Бұл еңбекте шекарарлық шарттары өзара тәуелсіз $Ly = -y''(x) = \lambda^2 y(x)$ Штурм-Лиувилл операторының меншікті мәндерінің еселік болуының бір белгісі табылды.

Поступила 07.07.2015 г.

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 4, Number 302 (2015), 172 – 181

WEIGHTED FUNCTIONAL INEQUALITIES

Sh. Bilal, A. B. Darzhanova

Institute of Mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: bilal44@mail.ru

Keywords: weight, inequality, investment, compact, space.

Abstract. With the emergence of a new direction in functional analysis - "embedding theorems of the functional spaces" - it turned out that study of the many qualitative properties of differential and integral operators is equivalent to the determination of appropriate embedding theorems with certain properties. Particularly, this approach gives productive results in establishing the properties of singular operators and embedding theorems of weighted spaces. In this article are discussed embedding of weighted spaces, embedding of functions with absolutely - continuous derivatives of a certain order in the Lebesgue space or score weighted inequality of Hardy. Obtained the necessary and sufficient conditions for the weighted inequality of Hardy or investments mentioned spaces. Founded matching two-sided estimates in order. Criterion for compactness of the embedding operator was given. It uses the method of localization based on a detailed study of the objects in the "characteristic" range, introduced in addictive behavior factors. One productive approach in studies of this kind belongs to M. Otelbaev which we use too.At the same time the results of this work are the results of the Oynarova'saddition.

УДК 517.51

О ВЕСОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ

Ш. Билал, А. Б. Даржанова

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: весовые, неравенства, вложение, компактность, пространства.

Аннотация. С возникновением нового направления в функциональном анализе - «теоремы вложения функциональных пространств» - выяснилось, что изучение многих качественных свойств дифференциальных и интегральных операторов эквивалентно установлению соответствующих теорем вложения с теми или иными свойствами. Особенно, такой подход дает плодотворные результаты в установлении свойств сингулярных операторов и теорем вложений весовых пространств. В данной статье рассматривается вложение весовых пространств, вложение пространства функций, имеющих абсолютно-непрерывные производные