Аргументі ауытқыған теңдеулердің бір класы үшін қойылған Нейманның есебінің спектрәлдік қасиеттері

Бесбаев Г.А., Иманбаева А.Б., Шалданбаев А.Ш.
ЮКГУ им. М.Ауезова, г. Шымкент, Тауке-хана 5

Тірек сөздер: спектр, толымдылық, меншікті векторлар.

Аннотация. Бұл, еңбек аргументі ауытқыған дифференциалдық теңдеуден туындаған, бір оператордың спектрәлдік қасиеттерін зерттеуге арналған,осы оператордың Нейман есебінің меншікті векторларының әсіре толымдылығы көрсетілген.

Авторы:
Бесбаев Г.А. – к.ф.-м.н.,декан высшей школы ИТиЭ Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент.
Иманбаева А.Б– к.ф.-м.н.,доцент кафедры «Математические методы и моделирование» Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент.
Шалданбаев Амир Шалданбаевич – д.ф.-м.н.,профессор кафедры «Математические методы и моделирование» Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент.

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 4, Number 302 (2015), 290 – 296

UDC 517.5

CRITERIA OF A VOLTERROVOST OF CORRECT NARROWING OF THE OPERATOR OF DIFFERENTIATION

Imanbayeva A.B., Besbaev G.A., Shaldanbayev A.Sh.
YuKGU of M. O. Auezov, Shymkent
shaldanbaev51@mail.ru

Key words: operator.formula volterrovy narrowing sledov.teoriya.

Abstract. In work it is received criteria of a volterrovost of correct narrowing of the operator of differentiation:

$$A=\frac{d}{dx},\quad D(A)=\left\{y(x)\in W_2^1(0,1):y(0)=\int_0^1 y'(t)\overline{g(t)}dt,\ g(x)\in L_2(0,1)\right\}$$

The result is formulated in terms of function g (x).

УДК 517.5

КРИТЕРИИ ВОЛЬТЕРРОВОСТИ КОРРЕКТНОГО СУЖЕНИЯ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Иманбаева А.Б., Бесбаев Г.Б., Шалданбаев А.Ш.
ЮКГУ им.М.О.Ауэзова,г.Шымкент

Ключевые слова: вольтерровый оператор.формулы следов.теория сужения.

Аннотация.В работе получен критерии вольтерровости корректного сужения оператора дифференцирования:

$$A=\frac{d}{dx},\quad D(A)=\left\{y(x)\in W_2^1(0,1): y(0)=\int_0^1 y'(t)\overline{g(t)}dt,\ g(x)\in L_2(0,1)\right\}$$

Результат сформулирован в терминах функции g(x).

1.Введение. Рассмотрим оператор дифференцирования в пространстве $L_2(0,1)$. Пусть оператор A порожден операцией

$$Ay(x)=y'(x),\qquad 0\le x\le 1 \tag{1.1}$$

и областью определения

$$D(A)=\{y(x)\in W_2^1(0,1): y(0)=\int y'(x)\overline{g(t)}dx,\ y(x)\in L_2(0,1)\} \tag{1.2}$$

Этот оператор изучался многими авторами [1], тем не менее многие вопросы пока остаются открытыми. Представляет интерес выяснение природы спектра оператора (1.1)+(1.2). По замечанию Дезина А.А [2] этот вопрос оказался неожиданно сложным.

Целью настоящей работы является установление критерия вольтерровости оператора (1.1)+(1.2),ранее, в работе [3] ,было анонсировано один необходимый признак вольтерровости этого оператора доказательство которого появилась в [4] .

2. Методы исследований

О спектре оператора (1.1)- (1.2) известны следующие факты [1].

Теорема 2.1. Оператор A имеет непустое резольвентное множество, в частности, нуль принадлежит этому множеству. Обратно, если оператор A порожден операцией дифференцирования и нуль принадлежит его резольвентному множеству, то найдется такая граничная функция $g(x)\in L_2(0,1)$, которая задает область определения оператора A в виде (1.2).

Весь спектр оператора, A ,однозначно определяется нулями целой функции

$$\Delta(x)=1-\lambda\int_0^1 e^{\lambda t}\overline{g(t)}dt \tag{2.1}$$

В случае, если $g(x)=-1$ при $0\le x\le\alpha$,и $g(x)=0$ при $\alpha\le x\le 1$, то $\Delta(x)=e^{\lambda x}$ и, следовательно, оператор A не имеет собственных значений. Не трудно видеть, что таким граничным функциям соответствует задачи Коши

$$Ay(x)=y'(x),\qquad y(\alpha)=0 \tag{2.2}$$

Введем два числа

$$d=\max\sup g(x),\quad c=\min\sup[g(x)+1],$$

где sup f(x) – замыкание носителя функции f(x).

Теорема 2.2. Оператор A имеет счетное число собственных значений тогда и только тогда, когда $d<c$.

Пусть B – вполне непрерывный оператор, тогда и $|B|=(B*B)^{1/2}$ компактен.

Определение 2.1. Собственные числа оператора $|B|$ называются S – числами оператора B.

Определение 2.2. Компактный оператор B будет называться ядерным если

$$\sum_{n=1}^{+\infty}s_j(B)<+\infty, \tag{2.3}$$

где $s_j(B)$ - s – числа оператора B.

Определение 2.3. Будем говорить, что линейный ограниченный оператор B, действующий в гильбертовом пространстве H, имеет конечный матричный след, если для любого ортонормированного базиса $\{\varphi_j\}_1^\infty$ пространства H ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(B\varphi_j,\varphi_j\right) \tag{2.4}$$

сходится.

Так как любая перестановка ортонормированного базиса превращает его снова в ортонормированный базис, то для оператора B с конечным матричным следом ряд (2.4) сходится абсолютно, каков бы ни был ортонормированный базис $\{\varphi_j\}_1^\infty$.

Лемма 2.1. Пусть ,B – линейный ограниченный неотрицательный оператор. Тогда сумма

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(B\psi_j,\psi_j\right) \tag{2.5}$$

имеет одно и то же значение (конечное или бесконечное) каков бы ни был ортонормированный базис $\{\psi_j\}_1^\infty$ пространства H. Оператор B ядерный тогда и только тогда, когда это значение конечно.

Теорема 2.3. Для того чтобы линейный ограниченный оператор B имел конечный матричный след, необходимо и достаточно, чтобы он был ядерным. Если B ядерный, то сумма

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(B\psi_j,\psi_j\right) \tag{2.6}$$

не зависит от выбора ортонормированного базиса $\{\psi_j\}_1^\infty$ пространства H.

Определение 2.4. Сумма (2.6) обозначается через SpB, и называется (матричным) следом оператора B.

Для формулировки основного результата нам понадобится следующее определение.

Определение 2.4. Вполне непрерывный оператор, B, имеющий единственную точку спектра в нуле называется вольтерровым оператором [5].

Лемма 2.2. Если оператор B вольтерров, то

SpB = 0.

3. Результаты исследований

Теорема 3.1. Если оператор

$$A=\frac{d}{dx},\quad D(A)=\left\{y(x)\in W_2^1(0,1):y(0)=\int_0^1 y'(t)g(t)dt,\ g(x)\in L_2(0,1)\right\} \tag{3.1}$$

вольтерров, т.е. не имеет спектра на конечной части комплексной λ плоскости (отличной от нуля), то

$$2\int_0^1 t\overline{g(t)}dt+\left(\int_0^1\overline{g(t)}dt\right)^2=0 \tag{3.2}$$

Доказательство. Найдем обратный оператор к оператору A, который окажется оператором Гильберта-Шмидта. Тогда его квадрат $\left(A^{-1}\right)^2$ будет ядерным оператором. В силу теоремы 2.3

оператор $\left(A^{-1}\right)^2$ имеет конечный матричный след, который не зависит от выбора ортонормированного базиса. Если оператор $\left(A^{-1}\right)^2$ вольтерров, то по лемме 2.2 имеет место равенство

$$sp\left(A^{-1}\right)^2 = 0 \tag{3.3}$$

Вычислив левую часть оператора (3.3) получим (3.2). Теперь по-подробнее.

Пусть $f(x) \in L_2(0,1)$, тогда $f(x) \in L_1(0,1)$. Следовательно, функция $f(x)$ суммируема по Лебегу и почти всюду имеет место формула

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x) \tag{3.4}$$

Применив эту теорему к краевой задаче

$$y'(x) = f(x), \quad y(0) = \int_0^1 y'(t)\overline{g(t)}dt \tag{3.5}$$

имеем

$$y(x) = y(0) + \int_0^x f(t)dt = \int_0^1 y'(t)\overline{g(t)}dt + \int_0^x f(t)dt = \int_0^x f(t)dt + \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Следовательно,

$$y(x) = A^{-1}f(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt \tag{3.6}$$

Пусть $K(x,t) = \theta(x-t) + \overline{g(t)}$, тогда оператор A^{-1} примет вид

$$A^{-1}f(x) = \int_0^1 K(x,t)f(t)dt.$$

Очевидно, что

$$\int_0^1\int_0^1 |K(x,t)|^2 dxdt < +\infty, \tag{3.7}$$

поэтому, оператор A^{-1} Гильберта-Шмидта. По известной теореме [5] оператор $\left(A^{-1}\right)^2$ ядерный. Вычислим след этого оператора. Вычисления показывают, что

$$A^{-2}f(x) = \int_0^x\int_0^t f(\xi)d\xi dt + x\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt + \int_0^1 f(t)\int_t^1 \overline{g(\xi)}d\xi dt + \int_0^1 f(t)\,\overline{g(t)}\,dt \cdot \int_0^1 \overline{g(t)}\,dt$$

(3.8) Известно [5], что функционал SpB обладает следующим свойством:

$$Sp(\alpha A + \beta B) = \alpha \cdot SpA + \beta \cdot SpB \tag{3.9}$$

Опираясь на эту формулу, вычислим след каждого слагаемого формулы (3.8). Из-за вольтерровости след первого слагаемого формулы (3.8) равен нулю.

$$Sp\left(x\cdot\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 x\cdot\int_0^1\varphi_n\,\overline{g(t)}\,dt\;\overline{\varphi_n(x)}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\varphi_n\,\overline{g(t)}\,dt\cdot\int_0^1 x\,\overline{\varphi_n(x)}\,dx=$$

$$=\left|\varphi_1=\frac{g(t)}{\|g\|},\ \varphi_n\perp g,\ n=2,3,...\right|=\int_0^1\varphi_1 g(t)dt\cdot\int_0^1 x\varphi_1(x)dx=\int_0^1\frac{g(t)}{\|g\|}\cdot\overline{g(t)}dt\cdot\int_0^1 t\cdot\overline{\varphi_1(t)}dt=$$

$$=\frac{\|g\|^2}{\|g\|}\cdot\int_0^1 t\cdot\frac{\overline{g(t)}}{\|g\|}dt=\int_0^1 t\cdot\overline{g(t)}dt;\qquad(3.9)$$

$$Sp\left(\int_0^1 f(t)\int_0^1\overline{g(\xi)}\,d\,\xi\,dt\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\varphi_n(t)\cdot\int_0^1\overline{g(\xi)}\,d\xi\,dt\int_0^1\overline{\varphi_n(t)}\,dt=$$

$$=\left|\varphi_1=\frac{\int_t^1 g(\xi)d\xi}{\left\|\int_t^1 g(\xi)d\xi\right\|},\ \varphi_j\perp\varphi_1,\ G(t)=\int_t^1 g(\xi)d\xi\right|=\int_0^1\varphi_1(t)\int_t^1\overline{g(\xi)}\,d\xi dt\cdot\int_0^1\varphi_1(t)dt=$$

$$\int_0^1\frac{G(t)}{\|G\|}\cdot\overline{G(t)}dt\cdot\int_0^1\frac{G(\eta)}{\|G\|}\cdot d\eta=\int_0^1\overline{G(\eta)}\cdot d\eta=\eta\cdot G(\eta)\Big|_0^1+\int_0^1\eta\overline{g(\eta)}\cdot d\eta=\int_0^1 t\,\overline{g(t)}\cdot dt;\qquad(3.10)$$

$$Sp\left(\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt\cdot\int_0^1\overline{g(t)}dt\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\int_0^1\varphi_n\overline{g(t)}dt\int_0^1\overline{g(t)}dt\overline{\varphi_n(x)}dx=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\varphi_n(t)\overline{g(t)}dt\cdot\int_0^1\overline{g(t)}dt\cdot\int_0^1\overline{\varphi_n(x)}dx=\left|\varphi_1=\frac{g(t)}{\|g\|},\ \varphi_j\perp\varphi_1,\ j=2,3,...\right|=$$

$$=\int_0^1\varphi_1\overline{g(t)}dt\cdot\int_0^1\overline{g(t)}dt\cdot\int_0^1\overline{\varphi_1(x)}dx=\int_0^1\frac{|g|^2}{\|g\|}dt\cdot\int_0^1\overline{g(t)}dt\cdot\int_0^1\frac{\overline{g(t)}}{\|g\|}dt=\left(\int_0^1\overline{g(t)}dt\right)^2.\qquad(3.11)$$

Из формул (3.8)-(3.11) получим

$$\mathrm{Sp}A^{-2}=2\int_0^1 t\,\overline{g(t)}\,dt+\left(\int_0^1\overline{g(t)}\,dt\right)^2\qquad(3.12)$$

Утверждение теоремы следует из формул (3.12) и (3.3). Теорема доказана.

Теорема 3.2. Оператор (1.1-1.2) является вольтерровым тогда и только тогда,когда имеет место равенство

$g(x)$=-1, если 0≤x≤α, и $g(x)$=0, если α≤x≤1. (3.13)

Доказательство.Если оператор (1.1-1.2) вольтерров,т.е. не имеет собственных значений на конечной части комплексной плоскости,то в силу [7] и [6] имеет место равенство

$1-\lambda\int_0^1\overline{g(t)}\,e^{\lambda t}dt=e^{\alpha\lambda}$,следовательно,$1-e^{\alpha\lambda}=\lambda\int_0^1\overline{g(t)}\,e^{\lambda t}dt$,тогда $\int_0^1\overline{g(t)}\,e^{\lambda t}dt=\frac{1-e^{\alpha\lambda}}{\lambda}$;

В силу единственности преобразования Фурье [8-11] для $g(x)$ имеет место равенство (3.13).

4.Выводы.Очевидно,что функция (3.13) удовлетворяет необходимого условия (3.2) ,и не удовлетворяет условия d<c теоремы 2.2,в данной ситуации d=c ,поэтому спектр состоит из конечного множества собственных значений,или вовсе отсутствует.Наша теорема говорит ,что имеет место последний случай,любопытно отметить,что нелинейное интегральное уравнение (3.2) имеет континум множество решений.Этого интегрального уравнения можно вывести с помощью

формулы Гаала [12],такая методика успешно применена в работах [13]- [15] для решения различных спектраьных задач.Мы воспользовались теоремой Лидского [16] . Следует отметить,что формулы следов операторов применяются при решении различных задач естество знания [17]- [20].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кангужин Б.Е., Садыбеков М.А. Дифференциальные операторы на отрезке, Распределение собственных значений, Шымкент, «Гылым», 1996,270 с.

[2] Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач,М.:Наука, 1980,270 с.

[3] Шалданбаев А.Ш.,Кудайбергенова К.Об одном признаке вольтерровости сужения оператора дифференцирования,Международная конференция «Дифференциальные уравнения,теория функций и приложения»,28 мая-2 июня,2007,с.368,Новосибирск.

[4] Шалданбаев А.Ш.,Бейсенова Н. О вольтерровости корректного сужения оператора дифференцирования, Пойск, №1, 2008, с.200-203.

[5] Гохберг И.Ц., М.Г.Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М.: Наука, 1965 г,448 с.

[6] Левин Б.Я.Целые функций,М.:МГУ,1971.

[7] Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. О структуре спектра краевой задачи Штурма-Лиувилля на конечном отрезке времени,Известия АН РК серия физ. – математическая, Алматы , 2000, С. 29-34.

[8] Титчмарш Э.Введение в теорию интегралов Фурье,М.:Гостехлит,1948.

[9] Бохнер С.Лекции об интегралах Фурье,М.:ГИФМЛ,1962.

[10] Винер Н.Интеграл Фурье и некоторые его приложения,М.:ГИФМЛ,1963.

[11] Винер Н, Пэли Р.Преобразование Фурье в комплексной области,М.:Наука,1964.

[12] Brislawn C.Kernels of trace class operators,Proceedings of AMS vol.104,N 4,pp.1181-1190.

[13] Шалданбаев А.Ш. О формулах следов одного класса операторов Штурма-Лиувилля Вестник Башкирского университета, том 14, №2, 2009, с.351-355.

[14] Садыбеков М.А.,Тойжанова Г.Д.Спектральные свойства одного класса краевых задач для парабола-гиперболического уравнения,Дифференц. уравнения,1992,Т.28,N 1,С.176-179.

[15] Кальменов Т.Ш. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа,Шымкент, Ғылым, 1993,328с.

[16] Лидский В.Б.Доклады АН СССР,1959,Т.125,N3,С.485-488.

[17] Шалданбаев А.Ш. Формулы следов для периодической и антипериодической задач Штурма–Лиувилля,Вестник МГУ, Серия 1,Математика-механика, 1982, №3,с. 6–11.

[18] Садовничий В.А,Подольский В.Е.Следы операторов,Успехи математических наук,2006,т.61,вып.5(371),с.89-148.

[19] Марченко В.А. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения,Киев, Наукова думка, 1977, 332с.

[20] Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма – Лиувилля,М.: Наука, 1984.

REFERENCES

[1] Kanguzhin B.E., Sadybekov M.A. Differencial'nye operatory na otrezke, Raspredelenie sobstvennyh znachenij, Shymkent, «Gylym», 1996,270 s.

[2] Dezin A.A. Obshhie voprosy teorii granichnyh zadach,M.:Nauka, 1980,270 s.

[3] Shaldanbaev A.Sh.,Kudajbergenova K.Ob odnom priznake vol'terrovosti suzhenija operatora differencirovanija,Mezhdunarodnaja konferencija «Differencial'nye uravnenija,teorija funkcij i prilozhenija»,28 maja-2 ijunja, 2007, c.368, Novosibirsk.

[4] Shaldanbaev A.Sh.,Bejsenova N. O vol'terrovosti korrektnogo suzhenija operatora differencirovanija,Pojsk,№1,2008,c.200-203.

[5] Gohberg I.C., M.G.Krejn. Vvedenie v teoriju linejnyh nesamosoprjazhennyh operatorov, M.: Nauka, 1965 g,448 s.

[6] Levin B.Ja.Celye funkcij,M.:MGU,1971.

[7] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. O strukture spektra kraevoj zadachi Shturma-Liuvillja na konechnom otrezke vremeni,Izvestija AN RK serija fiz. – matematicheskaja, Almaty , 2000, S. 29-34.

[8] Titchmarsh Je.Vvedenie v teoriju integralov Fur'e,M.:Gostehlit,1948.

[9] Bohner S.Lekcii ob integralah Fur'e,M.:GIFML,1962.

[10] Viner N.Integral Fur'e i nekotorye ego prilozhenija,M.:GIFML,1963.

[11] Viner N, Pjeli R.Preobrazovanie Fur'e v kompleksnoj oblasti,M.:Nauka,1964.

[12] Brislawn C.Kernels of trace class operators,Proceedings of AMS vol.104,N 4,pp.1181-1190.

[13] Shaldanbaev A.Sh. O formulah sledov odnogo klassa operatorov Shturma-Liuvillja Vestnik Bashkirskogo universiteta, tom 14, №2, 2009, s.351-355.

[14] Sadybekov M.A.,Tojzhanova G.D.Spektral'nye svojstva odnogo klassa kraevyh zadach dlja parabola-giperbolicheskogo uravnenija,Differenc. uravnenija,1992,T.28,N 1,C.176-179.

[15] Kal'menov T.Sh. Kraevye zadachi dlja linejnyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh giperbolicheskogo tipa,Shymkent, Ғylym, 1993,328s.

[16] Lidskij V.B.Doklady AN SSSR,1959,T.125,N3,C.485-488.

[17] Shaldanbaev A.Sh. Formuly sledov dlja periodicheskoj i antiperiodicheskoj zadach Shturma–Liuvillja,Vestnik MGU, Serija 1,Matematika-mehanika, 1982, №3,s. 6–11.
[18] Sadovnichij V.A,Podol'skij V.E.Sledy operatorov,Uspehi matematicheskih nauk,2006,t.61,vyp.5(371),c.89-148.
[19] Marchenko V.A. Operatory Shturma – Liuvillja i ih prilozhenija,Kiev, Naukova dumka, 1977, 332s.
[20] Levitan B.M. Obratnye zadachi Shturma – Liuvillja,M.: Nauka, 1984.

Жайлы тарылған дифференциалдау операторының вөлтерлі болуыныі үзілді кесілді шарты туралы

Иманбаева А.Б.,Бесбаев Г.А.,Шалданбаев А.Ш
ЮКГУ им.М.О.Ауэзова,г.Шымкент

Тірек сөздер: вөлтерлі оператор,іздер формуласы,тарылу теориясы.
Аннотация.Бұл жұмыста жайлы тарылған дифференциалдау операторының :

$$A=\frac{d}{dx},\quad D(A)=\left\{y(x)\in W_2^1(0,1): y(0)=\int_0^1 y'(t)\overline{g(t)}dt,\ g(x)\in L_2(0,1)\right\},$$

вөлтерлі болуының үзілді кесілді шарты табылған. Нәтижесі g(x) функциясы арқылы өрнектелеген.

Авторы:
Иманбаева А.Б– к.ф.-м.н.,доцент кафедры «Математические методы и моделирование» Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент.
Бесбаев Г.А. – к.ф.-м.н.,декан высшей школы ИТиЭ Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент.
Шалданбаев Амир Шалданбаевич – д.ф.-м.н.,профессор кафедры «Математические методы и моделирование» Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент.

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 4, Number 302 (2015), 296 – 303

UDC 517.9

CRITERION OF SELF-CONJUGACY OF THE VOLTAIRE OPERATOR OF STORM- LIOUVILLE IN SPACE CRANE

Shaldanbaev A.SH., Imanbaeva A.B., Besbaev G.A.
YuKGU of M. Auyezov, Shymkent
shaldanbaev51@mail.ru

Key words:prostranstvo Crane, the voltterrovy operator, self-conjugacy on an indefinite metrics, the operator Shturma-Liuvillya.
Astract. In the real work the criterion of self-conjugacy of the Voltaire operator Shturma-Liuvillya in space of Crane generated by an indefinite metrics where the operator is determined by a formula u (x) =u (1-x), ∀ u(x) ∈ L^2 (0,1) is received.

517.9

КРИТЕРИЙ САМОСОПРЯЖЕННОСТИ ВОЛЬТЕРРОВА ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ КРЕЙНА

Шалданбаев А.Ш., Иманбаева А.Б., Бесбаев Г.А.
ЮКГУ им. М.Ауезова, г. Шымкент