[23] Beisembetov I.K., Nussupov K.KH., Beisenkhanov N.B., Zharikov S.K., Kenzhaliev B.K, Akhmetov T.K., Seitov B.ZH. Raspredelenie atomov ugleroda v kremnii posle visokodozovoi implantacii ionov C^+ v Si// Izvestia NAN RK. Seria fiziko-matematicheskaia. 2013. № 6. S. 50–59.

[24] Kimura T., Kagiyama Sh. and Yugo Sh. Structure and annealing properties of silicon carbide thin layers formed by ion implantation of carbon ions in silicon. // Thin Solid Films. 1981. 81. P. 319–327.

ЖҰҚА КРЕМНИЙ КАРБИДІ ҚАБАТТАРЫН ИОНДЫҚ ИМПЛАНТАЦИЯ ӘДІСІМЕН СИНТЕЗДЕУ

Б. Ж. Сейтов, И. Қ. Бейсембетов, К. Х. Нүсіпов, Н. Б. Бейсенханов, Б. К. Кенжалиев, Д. И. Бакранова

Қазақстан-Британ техникалық университеті, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: кремний карбиді, иондық имплантация, құрылым, кристалдану.

Аннотация. Жұмыста, энергиясы 2,5 кэВ және дозасы $2{,}7\times10^{17}$ $см^{-2}$ көміртегі иондарын кремний пластиналарына имплантациялау арқылы аморфты кремний карбиді қабатын синтездеу жүзеге асырылған. Қабыршақтың жұту ИҚ-спектрін математикалық жіктеу жүзеге асырылған. Жалпы Si–C-байланыстардың 18,6% -ы кремний карбиді нанокристалы көлемінде және бетінде орналасқандығы, ал 81,4% аморфты бөлігі Si-C кластерлер құрамындағы қысқа (17%) және ұзын (64,4%) Si-C байланыстардың қосындысынан тұратындығы көрсетілген. Имплантация процесі кезінде қабат құрамының өзгеруі және тығыздығының артуы көміртегі атомдарының таралу профилінің тікбұрышты пішінге трансформациялануына алып келеді, яғни «SiC қабыршақ – Si матрица» қатаң шекарасы пайда болады, ал бұл, рефлектометрия әдісін қолдануға мүмкіндік береді. Рентгендік рефлектометрия әдісімен және Henke бағдарламасының көмегімен қабыршақ тығыздығы 2,71 г/$см^3$ құрайтындығы көрсетілген. Release бағдарламасының көмегімен модельдеу арқылы кремний матрицасы бетіндегі SiO_2 (0,8 нм), $SiC_{0,8}$ (2,0 нм), $SiC_{0,6}$ (13,0 нм) қабаттардан тұратын қалыңдығы 15,8 нм көпқабатты жүйенің негізгі параметрлері анықталған.

Жұмыстың нәтижелерін нано- және микроэлектроникада, сонымен қатар күн элементтерін өндіру барысында кремний бетін пассивтендіруге және антишашыратқыш жабындар синтездеуде пайдалануға болады.

Поступила 07.07.2015 г.

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 4, Number 302 (2015), 269 – 276

UDC 512.95

THE DECISION IS SINGULAR THE INDIGNANT TASK OF CAUCHY BY METHOD OF SPECTRAL DECOMPOSITION

Shaldanbayev A.Sh., Imanbayeva A.B., Besbaev G.A.,
YuKGU of M. Auyezov, Shymkent
shaldanbaev51@mail.ru

Key words: spectr, spectral decomposition, deviating argument, singular indignation.

Abstract.In this work essentially new method of research is offered is singular the indignant task of Cauchy, based on the spectral theory of the equations with we deviating by argument.

Many problems of mechanics, physics, equipment and other areas of science lead to the differential and integro-differential equations with small parameter at the senior derivative. Systematic research of such equations (now they are called it is singular revolted) began after emergence of the fundamental works of A. N. Tikhonov which paid attention of many researchers to the equations with small parameter at the senior derivative. In these works the general problem definition of Cauchy for systems of the nonlinear ordinary differential equations with small parameter at the senior derivative is given, and the theorems of limit transition establishing connection

between the decision initial are proved is singular the indignant task of Cauchy and the solution of the not indignant task received from initial at zero value of parameter.

One of important problems of the theory it is singular the indignant equations is creation of asymptotic decomposition of solutions of the equations in small parameter.

Among the asymptotic methods created in relation to it is singular to the indignant tasks, it should be noted very effective method of frontier layer functions offered by M. I. Vishik and L. A. Lyusternik for it is singular the indignant linear ordinary differential equations and the equations in private derivatives, A. B. Vasilyeva for it is singular the indignant nonlinear ordinary differential equations, and M. I. Imanaliyev for it is singular the indignant nonlinear integro-differential equations. This method received the name "Method of Frontier Layer Functions" now. Further development of this method is connected with works V.F.Butuzova V. A. Tupchiyeva and V. A. Trenogina

S. A. Lomov developed the method of regularization of singular indignations allowing to reduce is singular the indignant task to regularly indignant by means of which it is possible to develop bases of the general theory is singular the indignant equations. We will apply S. A. Lomov's method to a wide range of tasks to the ordinary differential equations and the equations in private derivatives.

In the real work the new method of the decision is offered is singular the indignant tasks which originates from the spectral theory of the equations with the deviating argument. The essence of a method consists in the following, the solution of a task decays in a row Fourier on own functions corresponding кр

УДК 512.95

РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ МЕТОДОМ СПЕКТРАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

Шалданбаев А.Ш., Иманбаева А.Б., Бесбаев Г.А.,
ЮКГУ им. М.Ауезова, Шымкент

Ключевые слова:спектр,спектральное разложение,отклонящиеся аргумент,сингулярное возмущение.

Аннотация. В настоящей работе, методом спектрального разложения, получено асимптотическое разложение решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1- го порядка с постоянным коэффициеном.

1.Введение. Многие задачи механики, физики, техники и других областей науки приводят к дифференциальным и интегро-дифференциальным уравнениям с малым параметром при старшей производной. Систематическое исследование таких уравнений (в настоящее время их называют сингулярно возмущенными) началось после появления фундаментальных работ А.Н.Тихонова [1-3], обративших внимание многих исследователей к уравнениям с малым параметром при старшей производной. В этих работах дана общая постановка задачи Коши для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной, и доказаны теоремы о предельном переходе, устанавливающие связь между решением исходной сингулярно возмущенной задачи Коши и решением невозмущенной задачи, получаемой из исходной при нулевом значении параметра.

Одним из важных проблем теории сингулярно возмущенных уравнений является построения асимптотических разложений решений уравнений по малому параметру.

Среди асимптотических методов, созданных применительно к сингулярно возмущенным задачам, следует отметить весьма эффективный метод погранслойных функций, предложенный М.И.Вишиком и Л.А.Люстерником [4,5] для сингулярно возмущенных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, А.Б.Васильевой [6,7] для сингулярно возмущенных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, и М.И.Иманалиевым [8,9] для сингулярно возмущенных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Этот метод в настоящее время получил название «Метод погранслойных функций». Дальнейшее развитие этого метода связано с работами В.Ф.Бутузова [10,11], В.А.Тупчиева [12] и В.А.Треногина [13].

С.А.Ломов [14,15,16] разработал метод регуляризации сингулярных возмущений, позволяющий свести сингулярно возмущенную задачу к регулярно возмущенным, с помощью которого удаётся развить основы общей теории сингулярно возмущенных уравнений. Метод

С.А.Ломова применим к широкому кругу задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

В настоящей работе предлагается новый метод решения сингулярно возмущенных задач, который берёт своё начало со спектральной теории уравнений с отклоняющимся аргументом. Суть метода заключается в следующем, решение задачи разлагается в ряд Фурье по собственным функциям соответствующей краевой задачи, затем с помощью интегрирования по частям преобразуются коэффициенты этого ряда. В результате этих преобразований, получим новое (рекурентное) представление решения исходной задачи. Далее методом математической индукции удаётся получить асимптотическое разложение решения интересующей нас задачи. Остаток полученного разложения оценивается методом априорных оценок. С помощью прямых вычислений показывается общность полученной рекуррентной формулы, и снимаются дополнительные условия, появившиеся по ходу исследований.

2.Методы исследований

Рассмотрим в пространстве $H = L^2(0,1)$ сингулярно возмущенную задачу Коши:

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y'(x) + ay(x) = f(x),\ x \in (0,1], \qquad (1)$$

$$y(0) = 0, \qquad (2)$$

где $f(x) \in H$, $a > 0$, а ε – положительный малый параметр.

Существуют различные методы решения задачи (1-2), мы предлагаем метод, основанный на спектральной теории линейных операторов [17]. Дело в том, что задаче (1)-(2) соответствует линейный оператор:

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y'(x) + ay(x),$$

определенный на линейном многообразии, непрерывных на отрезке [0,1] и непрерывно дифференцируемых на полу интервале (0,1] функции $y(x)$ удовлетворяющих условию:

$$y(0) = 0.$$

Пусть $D(L_\varepsilon) = \{y(x) \in C^1(0,1] \cap C[0,1], y(0) = 0\}$ область определения, а $R(L_\varepsilon)$ – область значений оператора L_ε. Из условия $a > 0$ следует полуограниченность снизу оператора L_ε, что обеспечивает существование обратного и ограниченного оператора L_ε^{-1}, определенного на области значении $R(L_\varepsilon)$. Поскольку для любой непрерывной функции $f(x)$ существует единственное решение задачи Коши (1)+(2), то $R(L_\varepsilon)$ - совпадает с линейным многообразием непрерывных функций на отрезке [0,1]. Линейное многообразие непрерывных функций всюду плотно в пространстве H, поэтому обратный оператор L_ε^{-1} продолжается на все пространство H по непрерывности, следовательно, область значении замыкания оператора L_ε совпадает со всем пространством H, т.е. $R(\overline{L_\varepsilon}) = H$.

Нетрудно заметить, что оператор SL_ε симметричный на области определения $D(L_\varepsilon)$, где оператор S определен формулой:

$$Su(x) = u(1 - x).$$

Очевидно, что $\overline{SL_\varepsilon} = S\overline{L_\varepsilon}$, поэтому область значений оператора $\overline{SL_\varepsilon}$ также совпадает со всем пространством. Из включения $SL_\varepsilon \subset (SL_\varepsilon)^*$ следует включение $\overline{SL_\varepsilon} \subset \overline{(SL_\varepsilon)^*}$ и в силу замкнутости оператора $(SL_\varepsilon)^*$ имеет место равенство: $\overline{SL_\varepsilon^*} = (SL_\varepsilon)^*$. Поскольку, как мы уже показали, область значений оператора $\overline{SL_\varepsilon}$, совпадает со всем пространством H, то $\overline{SL_\varepsilon} = (SL_\varepsilon)^*$, следовательно, $(\overline{SL_\varepsilon})^* = (SL_\varepsilon)^{**} = \overline{\overline{SL_\varepsilon}}$, т.е. замыкание оператора SL самосопряжен в пространстве H.

С другой стороны, оператор $(\overline{L_\varepsilon})^{-1} = \overline{L_\varepsilon^{-1}}$ принадлежит к классу Гильберта – Шмидта, поэтому является вполне непрерывным оператором в пространстве H. В конечном счете, мы получим, что оператор $(\overline{SL_\varepsilon})^{-1}$ самосопряжен и вполне непрерывен, поэтому по теореме Гильберта – Шмидта [18,с.226] с его собственных векторов можно составить ортонормированный базис пространства H.

Искомое решение задачи (1)-(2) разлагается в ряд Фурье по этой системе. Коэффициенты Фурье этого разложения после некоторых преобразований дают асимптотическое разложение решения задачи (1)-(2). Остаток этого разложения оценивается, либо через наименьшее собственное значение оператора SL_ε, либо как следствие полуограниченности оператора L_ε.

Найдем фундаментального решения однородного уравнения:

$$\varepsilon e' + ae = 0,$$

$$e(0) = 1.$$

$\varepsilon e' = -ae$, $\frac{e'}{e} = -\frac{a}{\varepsilon}$, $(\ln e)' = -\frac{a}{\varepsilon}$, $\ln e|_0^x = -\int_0^x \frac{a}{\varepsilon}dt = -\frac{a}{\varepsilon}x$, $\ln e(x) - \ln e(0) = -\frac{a}{\varepsilon}x$,
$\ln\frac{e(x)}{e(0)} = -\frac{a}{\varepsilon}x$, $e(x) = e(0)e^{-\frac{a}{\varepsilon}x} = e^{-\frac{a}{\varepsilon}x}$.

Пусть $f(x)$ – непрерывная функция, тогда решения задачи (1)-(2) ищем в виде:

$$y(x,\varepsilon,f) = \int_0^x K(x,t)f(t)dt, \qquad (3)$$

где $K(x,t)$ - пока неизвестная функция. Подставив (3) в (1)-(2) имеем,

$$y'(x) = K(x,x)f(x) + \int_0^x \frac{\partial K}{\partial x}f(t)dt,$$

$$\varepsilon y'^{(x)} + ay(x) = \varepsilon K(x,x)f(x) + \int_0^x \varepsilon\frac{\partial K}{\partial x}f(t)dt + \int_0^x aK(x,t)f(t)dt = \varepsilon K(x,x)f(x) +$$

$$+\int_0^x \left[\varepsilon\frac{\partial K}{\partial x} + aK\right]f(t)dt = f(x).$$

Следовательно, надо полагать

$$\varepsilon K(x,x) = 1,\ \varepsilon\frac{\partial K}{\partial x} + aK = 0.$$

т.е. при каждом фиксированном значении t функция $K(x,t)$ является решением задачи Коши соответствующего однородного уравнения. Нетрудно заметить, что искомой функцией является:

$$K(x,t) = \frac{e(x-t)}{\varepsilon}.$$

В самом деле,

$$\varepsilon K(x,t)|_{t=x} = e(0) = 1,$$

$$\varepsilon\frac{\partial e(x-t)}{\partial x} + ae(x-t) = \varepsilon e'(x-t) + ae(x-t) = 0.$$

Таким образом, для любой непрерывной функции $f(x)$ решение задачи Коши (1)-(2) существует и имеет вид:

$$y(x,\varepsilon,f) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x e(x-t)f(t)dt, \qquad (4)$$

где $e(x) = \exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}x\right)$ - есть фундаментальное решение соответствующего однородного уравнения.

Формулу (4) можно переписать в виде:

$$y(x,\varepsilon,f) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 \theta(x-t)e(x-t)f(t)dt, \qquad (5)$$

где $\theta(x)$ - функция Хевисайда. Ядро, интегрального оператора (5) является ограниченной функцией, поэтому он является ограниченным оператором на линейном многообразии непрерывных функций, а поскольку это многообразие плотно в $L^2(0,1)$, то оператор (5) продолжается на все пространство $L^2(0,1)$ по непрерывности.

Таким образом, область значений замыкания оператора:

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y'(x) + ay(x),\ x \in [0,1]$$

$$D(L_\varepsilon) = \{y(x) \in C^1(0,1) \cap C[0,1], y(0) = 0\}$$

совпадает со всем пространством H.

Умножив обе части уравнения (1) скалярно на функцию $y(x)$, получим

$$\varepsilon(y',y) + a\cdot\|y\|^2 = (f,y).$$

В силу начального условия, имеем:

$$\varepsilon(y',y) = \varepsilon\int_0^1 ydy = \varepsilon\cdot\frac{y^2(x)}{2}\Big|_0^1 = \varepsilon\frac{y^2(1)}{2} > 0,$$

Следовательно, $a\cdot\|y\|^2 \le (f,y) \le \|f\|\cdot\|y\|$, $a\|y\| \le \|f\| = \|L_\varepsilon y\|$.

Если $f = 0$, то из последнего неравенства следует, что $\|y\| = 0$, т.е. $y(x) \equiv 0$,

тем самым доказана единственность найденного решения и ограниченность обратного оператора, поскольку имеет место неравенство:

$$\|y\| = \|L_\varepsilon^{-1}f\| \le \frac{\|f\|}{a}, \qquad \|L_\varepsilon^{-1}\| \le \frac{1}{a},$$

Далее из уравнения (1) получим оценку производной найденного решения:

$$\varepsilon y'(x) + ay(x) = f(x), \qquad \varepsilon y'(x) = f(x) - ay(x), \qquad \varepsilon\|\dot{y}\| \le \|f\| + a\|y\| \le 2\|f\|,$$

$$\|\dot{y}\| \le \frac{2}{\varepsilon}\|f\|, \qquad \|\dot{y}\|_1 = (\|\dot{y}\|^2 + \|y\|^2)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{\frac{4}{\varepsilon^2}\|f\|^2 + \|f\|^2} \le \sqrt{\frac{4}{\varepsilon^2} + 1} \cdot \|f\|.$$

Следовательно, при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$ обратный оператор L_ε^{-1} является компактным, более того, он принадлежит классу Гильберта – Шмидта, что является следствием ограниченности ядра интегрального оператора (5).

Если оператор S определен формулой:

$$Su(x) = u(1-x), \tag{6}$$

то оператор SL_ε является симметричным оператором в пространстве H. В самом деле, пусть $u, v \in D(L_\varepsilon)$, тогда

$$(SL_\varepsilon u, v) = (L_\varepsilon u, Sv) = \int_0^1 (\varepsilon u' + au)v(1-x)dx = \varepsilon\int_0^1 v(1-x)du +$$

$$+\int_0^1 au(x)v(1-x)dx = \varepsilon v(1-x)u|_0^1 + \int_0^1 v'(1-x)u(x)dx + \int_0^1 au(x)v(1-x)dx =$$

$$= \int_0^1 u(x)\left[v'^{(1-x)} + av(1-x)\right]dx = (u, SL_\varepsilon v).$$

Из симметричности оператора SL_ε следует симметричность оператора $(SL_\varepsilon)^{-1}$, и поскольку оператор $(SL_\varepsilon)^{-1}$ определен на всем пространстве $L^2(0,1)$, то он является самосопряженным оператором. Таким образом, оператор $(SL_\varepsilon)^{-1}$ самосопряжен и вполне непрерывен, тогда по теореме Гильберта – Шмидта нормированные собственные векторы этого оператора составляют ортонормированный базис пространства $L^2(0,1)$.

Лемма 1. Если $Su(x) = u(1-x)$, то нормированные собственные векторы оператора SL_ε образуют ортонормированный базис пространства H.

Теорема 1. Для сильного решения задачи Коши (1)-(2) имеет место представление:

$$y(x, \varepsilon, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Sf, \varphi_n)}{\lambda_n}\varphi_n(x), \tag{7}$$

где $\varphi_n(x)$ - собственные векторы (функций), а λ_n $(n = 1,2,\dots)$ - собственные значения оператора SL_ε, где $Su(x) = u(1-x)$,

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y'(x) + ay(x), x \in [0,1], \qquad (1)/$$

$$D(L_\varepsilon) = \{y(x) \in C^1(0,1) \cap C[0,1], y(0) = 0\}. \qquad (2)/$$

Доказательство. Действуя оператором S на обе части уравнения (1), получим $SL_\varepsilon y = Sf$, следовательно, $y(x, \varepsilon, f) = (SL_\varepsilon)^{-1}Sf(x)$, $SL_\varepsilon\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$ $(n = 1,2,\dots)$, $\varphi_n = \lambda_n(SL_\varepsilon)^{-1}\varphi_n$, $(SL_\varepsilon)^{-1}\varphi_n = \frac{\varphi_n}{\lambda_n}$,

$$y(x, \varepsilon, f) = (SL_\varepsilon)^{-1}Sf(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left((SL_\varepsilon)^{-1}Sf, \varphi_n\right) \cdot \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(Sf, (SL_\varepsilon)^{-1}\varphi_n\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(Sf, \varphi_n)}{\lambda_n} \cdot \varphi_n(x).$$

Теорема 1 доказана, она составляет основу нашего метода. В следующем пункте мы выводим асимптотическое разложение решения задачи (1)-(2).

3. Результаты исследований

Лемма 2. Если $f(x) \in W_2^1[0,1]$, то имеет место формула:

$$y(x,\varepsilon,f)=\frac{f(x)}{a}-\frac{\varepsilon}{a}f(0)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(1)}{\lambda_n}\varphi_n(x)-\frac{\varepsilon}{a}y(x,\varepsilon,f'), \qquad (8)$$

где $y(x,\varepsilon,f')$ - есть решение той же самой задачи Коши, но с правой частью $f'(x)$.

Лемма 3. Имеет место формула

$$\varepsilon\cdot\frac{\varphi_n(1)}{\lambda_n}=(\varphi_n,e), \qquad (9)$$

где λ_n - собственные значения, а $\varphi_n(x)$ - собственные функций оператора SL_ε, а $e(x)$ - фундаментальное решение однородного уравнения, т.е.

$$\begin{cases}\varepsilon e'+ae=0,\\ e(0)=1.\end{cases} \qquad (10),(11)$$

Лемма 4. Если $f(x)\in W_2^1[0,1]$, то имеет место формула:

$$y(x,\varepsilon,f)=\frac{f(x)}{a}-\frac{f(0)}{a}\cdot e(x)-\frac{\varepsilon}{a}y(x,\varepsilon,f'), \qquad (12)$$

где $e(x)$ - фундаментальное решение, соответствующего однородного уравнения, а $y(x,\varepsilon,f')$ - решение той же самой задачи Коши (1)-(2), но с правой частью $f'(x)$.

Теорема 2. Если $a>0$ и $f(x)\in W_2^1[0,1]$, то решение сингулярно возмущенной задачи Коши (1)-(2) удовлетворяет оценке:

$$\left\|y(x,\varepsilon,f)-\frac{f(x)-f(0)e(x)}{a}\right\|\le\frac{\varepsilon\|\dot f\|}{a^2},$$

где $e(x)$ - фундаментальное решение однородного уравнения:

$$\varepsilon e'(x)+ae(x)=0, \qquad (10)$$

$$e(0)=1. \qquad (11)$$

Следствие 1. Если $a>0$, $f(x)\in W_2^1[0,1]$ и $f(0)=0$, то имеет место также оценка:

$$\left\|y'(x,\varepsilon,f)-\frac{f'(x)-f'(0)e(x)}{a}\right\|\le\frac{\varepsilon\|\ddot f\|}{a^2}. \qquad (13)$$

Если $f(x)\in W_2^n[0,1]$ и $n>1$, то по формуле (12) можно выводить последующие члены разложения. Например, если $f(x)\in W_2^2[0,1]$, то имеем

$$y(x,\varepsilon,f')=\frac{f'(x)}{a}-\frac{f'(0)}{a}\cdot e(x)-\frac{\varepsilon}{a}y(x,\varepsilon,f''),$$

$$y(x,\varepsilon,f)=\frac{f(x)}{a}-\frac{f(0)}{a}e(x)-\frac{\varepsilon}{a}\left[\frac{f'(x)-f'(0)e(x)}{a}-\frac{\varepsilon}{a}y(x,\varepsilon,f'')\right]$$

$$=\frac{f(x)}{a}-\frac{f(0)e(x)}{a}-\frac{[f'(x)-f'(0)e(x)]\varepsilon}{a^2}+\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^2y(x,\varepsilon,f'').$$

Теперь воспользуемся математической индукцией, предположим, что имеет место формула:

$$y(x,\varepsilon,f)=\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\frac{\left[f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)e(x)\right]\varepsilon^k}{a^{k+1}}+(-1)^{n-1}\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^{n-1}y\left(x,\varepsilon,f^{(n-1)}\right),$$

тогда

$$y\left(x,\varepsilon,f^{(n-1)}\right)=\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(0)e(x)}{a}-\frac{\varepsilon}{a}y\left(x,\varepsilon,f^{(n)}\right),$$

поэтому

$$y(x,\varepsilon,f)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{\left[f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)e(x)\right]\varepsilon^k}{a^{k+1}}+(-1)^n\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^n y\left(x,\varepsilon,f^{(n)}\right).$$

В силу ранее доказанной априорной оценки имеет место неравенство:

$$\left\|y\left(x,\varepsilon,f^{(n)}\right)\right\|\le\frac{\left\|f^{(n)}(x)\right\|}{a},$$

поэтому

$$\left\|y(x,\varepsilon,f)-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{\left[f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)e(x)\right]\varepsilon^k}{a^{k+1}}\right\|\le\frac{\varepsilon^n}{a^{n+1}}\left\|f^{(n)}(x)\right\|.$$

Теорема 3. Если $a>0$ и $f(x)\in W_2^n[0,1]$, то решение сингулярно возмущенной задачи Коши (1)-(2) принадлежит пространству $W_2^{n+1}[0,1]$ и удовлетворяет оценке:

$$\left\| y(x,\varepsilon,f) - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{\left[f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)e(x)\right]\varepsilon^k}{a^{k+1}} \right\| \le \frac{\varepsilon^n}{a^{n+1}} \left\| f^{(n)}(x) \right\|.$$

Следствие 2. Если $a > 0$, $f(x) \in W_2^n[0,1]$ и $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$, то имеет место оценка:

$$\left\| y(x) - \frac{f(x)}{a} \right\|_{n-1} \le \frac{\varepsilon}{a^2} \|f'(x)\|_{n-1},$$

где $\|\cdot\|_{n-1}$ – норма пространства Соболева $W_2^{n-1}[0,1]$.

Доказательство. Продифференцировав основного уравнения k – раз, получим / $1 \le k \le n-1$ /

$$\begin{cases} \varepsilon y^{(k+1)} + a y^{(k)} = f^{(k)}(x), \\ y^{(k)}(0) = 0. \end{cases}$$

Тогда в силу формулы (13), имеем:

$$\left\| y^{(k)}(x,\varepsilon,f) - \frac{f^{(k)}(x)}{a} \right\| \le \frac{\varepsilon^2}{a^2} \left\| y\left(x,\varepsilon,f^{(k+1)}\right) \right\|^2 \le \frac{\varepsilon^2}{a^4} \left\| f^{(k+1)}(x) \right\|^2.$$

Просуммировав этих неравенств и извлекая корень квадратный от полученной суммы, имеем:

$$\left\| y(x,\varepsilon,f) - \frac{f(x)}{a} \right\|_{n-1} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left\| y^{(k)}(x,\varepsilon,f) - \frac{f^{(k)}(x)}{a} \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{\varepsilon}{a^2} \|f'(x)\|_{n-1}.$$

4.Выводы

Если правая часть уравнения (1) является негладкой функцией, то наш метод обладает некоторыми преимуществами по сравнению с методом последовательных приближений. Дело в том, что гладкость n - го приближения, полученного последним методом, такой же как у f(x), что приводит к большим ошибкам при численной реализации, а гладкость n – ой частичной суммы ряда Фурье бесконечно. Как нам кажется, этот момент играет существенную роль при практической реализации данного метода при конкретных ситуациях.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра, Математический сборник. 1948. Т.22. - №2. – с.193-204.

[2] Тихонов А.Н. О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры, Математический сборник. 1950. 27(69) – с.147-156.

[3] Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных,Математический сборник. 1952. Т.31(73). - №3. – с.575-586.

[4] Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром,УМН. 1957. Т.12. - №5. – с.3-122.

[5] Вишик М.И., Люстерник Л.А. Об асимптотике решений краевых задач для квазилинейных дифференциальных уравнений,ДАН СССР. 1958. Т.121. - №5. – с.778-781.

[6] Васильева А.Б. Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной,УМН. 1963. Т.18. - №3. – с.15-86.

[7] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений,М.: Наука, 1973, 272с.

[8] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений, М.: Высш. шк., 1990, 200с.

[9] Иманалиев М.И. Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегро – дифференциальных систем,Фрунзе, Илим, 1972, 356с.

[10] Иманалиев М.И. Колебания и устойчивость сингулярно возмущенных интегро – дифференциальных систем,Фрунзе,Илим,1974,352с.

[11] Бутузов В.Ф. Об асимптотике решений сингулярно возмущенных уравнений эллиптического типа в прямоугольной области,Дифференциальные уравнения, 1975 Т.2, №6, с.1030-1041.

[12] Бутузов В.Ф. Угловой погранслой в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений,Математический сборник,1977,Т.104,№3,с.460-485.

[13] Тупчиев В.А. Асимптотика решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений первого порядка с малым параметром при производных,ДАН СССР,1962,Т.143,№6,1296-1299.

[14] Треногин В.А. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных,Математический сборник,1952,Т.31(73),№3,с.575-586.

[15] Ломов С.А. Об одном методе регуляризации сингулярных возмущений, ДАН СССР,1967,Т.177,№6,с.1273-1275.

[16] Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений,М.: Наука, 1981,400с.

[17] Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш.,Ахметова С.Т. К спектральной теории уравнений с отклоняющимися аргументами, Математический журнал, Алматы 2004, т 4,№ 3(13), с.41-48.

[18] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики,Т.1-2,М.: Мир, 1977.

REFERENCES

[1] Tihonov A.N. O zavisimosti reshenij differencial'nyh uravnenij ot malogo parametra, Matematicheskij sbornik. 1948. T.22. - №2. – s.193-204.

[2] Tihonov A.N. O sistemah differencial'nyh uravnenij, soderzhashhih parametry, Matematicheskij sbornik. 1950. 27(69) – s.147-156.

[3] Tihonov A.N. Sistemy differencial'nyh uravnenij, soderzhashhie malye parametry pri proizvodnyh,Matematicheskij sbornik. 1952. T.31(73). - №3. – s.575-586.

[4] Vishik M.I., Ljusternik L.A. Reguljarnoe vyrozhdenie i pogranichnyj sloj dlja linejnyh differencial'nyh uravnenij s malym parametrom,UMN. 1957. T.12. - №5. – s.3-122.

[5] Vishik M.I., Ljusternik L.A. Ob asimptotike reshenij kraevyh zadach dlja kvazilinejnyh differencial'nyh uravnenij,DAN SSSR. 1958. T.121. - №5. – s.778-781.

[6] Vasil'eva A.B. Asimptotika reshenij nekotoryh zadach dlja obyknovennyh nelinejnyh differencial'nyh uravnenij s malym parametrom pri starshej proizvodnoj,UMN. 1963. T.18. - №3. – s.15-86.

[7] Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. Asimptoticheskie razlozhenija reshenij singuljarno vozmushhennyh uravnenij,M.: Nauka, 1973, 272s.

[8] Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. Asimptoticheskie metody v teorii singuljarnyh vozmushhenij, M.: Vyssh. shk., 1990, 200s.

[9] Imanaliev M.I. Asimptoticheskie metody v teorii singuljarno vozmushhennyh integro – differencial'nyh sistem,Frunze, Ilim, 1972, 356s.

[10] Imanaliev M.I. Kolebanija i ustojchivost' singuljarno vozmushhennyh integro – differencial'nyh sistem,Frunze,Ilim,1974,352s.

[11] Butuzov V.F. Ob asimptotike reshenij singuljarno vozmushhennyh uravnenij jellipticheskogo tipa v prjamougol'noj oblasti,Differencial'nye uravnenija, 1975 T.2, №6, s.1030-1041.

[12] Butuzov V.F. Uglovoj pogransloj v smeshannyh singuljarno vozmushhennyh zadachah dlja giperbolicheskih uravnenij,Matematicheskij sbornik,1977,T.104,№3,s.460-485.

[13] Tupchiev V.A. Asimptotika reshenija kraevoj zadachi dlja sistemy differencial'nyh uravnenij pervogo porjadka s malym parametrom pri proizvodnyh,DAN SSSR,1962,T.143,№6,1296-1299.

[14] Trenogin V.A. Sistemy differencial'nyh uravnenij, soderzhashhie malye parametry pri proizvodnyh,Matematicheskij sbornik,1952,T.31(73),№3,s.575-586.

[15] Lomov S.A. Ob odnom metode reguljarizacii singuljarnyh vozmushhenij, DAN SSSR,1967,T.177,№6,s.1273-1275.

[16] Lomov S.A. Vvedenie v obshhuju teoriju singuljarnyh vozmushhenij,M.: Nauka, 1981,400s.

[17] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh., Ahmetova S.T. K spektral'noj teorii uravnenij s otklonjajushhimisja argumentami, Matematicheskij zhurnal, Almaty 2004, t 4,№ 3(13), s.41-48.

[18] Rid M., Sajmon B. Metody sovremennoj matematicheskoj fiziki,T.1-2,M.: Mir, 1977.

Спектрәлді таралым әдісі арқылы сингуляр әсерленген Кошидің есебін шешу

Шалданбаев А.Ш., Иманбаева А.Б., Бесбаев Г.А.
ЮКГУ им. М.Ауезова, Шымкент

Тірек сөздер:спектр,спектрәлді таралым,ауытқыған аргумент,сингуляр әсер.

Аннотация. Бұл еңбекте спектрәлді таралым әдісі арқылы бірінші ретті,коэффициенті тұрақты, кәдімгі дифференциалдық теңдеудің сингуляр әсерленген Коши есебі шешілді.

Авторы:

Шалданбаев Амир Шалданбаевич – д.ф.-м.н.,профессор кафедры «Математические методы и моделирование» Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент.

Иманбаева А.Б– к.ф.-м.н.,доцент кафедры «Математические методы и моделирование» Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент.

Бесбаев Г.А. – к.ф.-м.н.,декан высшей школы ИТиЭ Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент.

Поступила 07.07.2015 г.