N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 5, Number 303 (2015), 124 – 132

ON THE UNIQUE SOLVABILITY OF A MULTI-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A THIRD-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION

A. T. Assanova[1], A. E. Imanchiev[2]

[1]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling MES RK, Almaty, Kazakhstan,
[2]Aktobe Regional State University after K.Zhubanov MES RK, Aktobe, Kazakhstan.
E-mail: anarasanova@list.ru, imanchiev_ae@mail.ru

Key words: equation, multi-point, solvability, parameter, algorithm.

Abstract. The multi-point boundary value problem for a third order differential equation with variable coefficients is considered. The questions of a existence unique solution of the considered problem and ways of its construction are investigated. The multipoint boundary value problem for the differential equation of third order with variable coefficients is reduced to a multipoint boundary value problem for a system of three differential equations by introducing new functions. For solve of resulting multipoint boundary value problem is applied a parameterization method. An algorithms of finding the approximate solution to the multipoint boundary value problem for the system of three differential equations are constructed and their convergence is proved. The conditions of the unique solvability of the multipoint boundary value problem for the system of three differential equations are established in the terms of initial data. The results also formulated relative to the original of the multipoint boundary value problem for the differential equation of third order with variable coefficients. The obtained results are applied to a periodic boundary value problem for the third order ordinary differential equation. The efficiency of the proposed approach for solve of the two-point boundary value problems for the third order differential equations that arise in applications. The results can also be used in the study and solve of a nonlinear multi-point boundary value problems for the third order differential equations.

УДК 517.927

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬГО ПОРЯДКА

А. Т. Асанова[1], А.Е.Иманчиев[2]

[1]Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан,
[2]Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова МОН РК, Актобе, Казахстан

Ключевые слова: уравнение, многоточечное, разрешимость, параметр, алгоритм.

Аннотация. Рассматривается многоточечная краевая задача для дифференциального уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами. Исследуются вопросы существования единственного решения рассматриваемой задачи и способы его построения. Путем введения новых функций многоточечная

краевая задача для дифференциального уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами сведена к многоточечной краевой задаче для системы трех дифференциальных уравнений. Для решения полученной многоточечной краевой задачи применяется метод параметризации. Построены алгоритмы нахождения приближенного решения многоточечной краевой задачи для системы трех дифференциальных уравнений и доказана их сходимость. Установлены условия однозначной разрешимости многоточечной краевой задачи для системы трех дифференциальных уравнений в терминах исходных данных. Результаты также сформулированы относительно исходной многоточечной краевой задачи для дифференциального уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами. Полученные результаты применяются к периодической краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка. Показана эффективность предложенного подхода при решении двухточечных краевых задач для дифференциальных уравнений третьего порядка, возникающих в приложении. Результаты могут также использоваться при исследовании и решении нелинейных многоточечных краевых задач для дифференциальных уравнений третьего порядка.

Рассматривается многоточечная краевая задача для дифференциального уравнения третьего порядка

$$\frac{d^3z}{dt^3} = A_1(t)\frac{d^2z}{dt^2} + A_2(t)\frac{dz}{dt} + A_3(t)z + f(t),\ t \in (0,T), \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{m}\left\{\alpha_{i1}\frac{d^2z(t_i)}{dt^2} + \beta_{i1}\frac{dz(t_i)}{dt} + \gamma_{i1}z(t_i)\right\} = d_1, \tag{2}$$

$$\sum_{i=0}^{m}\left\{\alpha_{i2}\frac{d^2z(t_i)}{dt^2} + \beta_{i2}\frac{dz(t_i)}{dt} + \gamma_{i2}z(t_i)\right\} = d_2, \tag{3}$$

$$\sum_{i=0}^{m}\left\{\alpha_{i3}\frac{d^2z(t_i)}{dt^2} + \beta_{i3}\frac{dz(t_i)}{dt} + \gamma_{i3}z(t_i)\right\} = d_3, \tag{4}$$

где функции $A_j(t)$, $f(t)$ непрерывны на $[0,T]$, $j = 1,2,3$, α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik}, d_k - постоянные, $i = \overline{0,m}$, $k = 1,2,3$, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{m-1} < t_m = T$.

Функция $z(t) \in C([0,T],R)$, имеющая производные $\frac{dz(t)}{dt} \in C([0,T],R)$, $\frac{d^2z(t)}{dt^2} \in C([0,T],R)$, $\frac{d^3z(t)}{dt^3} \in C([0,T],R)$, называется решением задачи (1)-(4), если она удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) для всех $t \in (0,T)$ и выполнены многоточечные краевые условия (2)-(4).

Математическое моделирование различных процессов физики, химии, биологии, техники, экологии, экономики и др. приводят к многоточечным краевым задачам для дифференциальных уравнений высоких порядков с переменными коэффициентами. Особый интерес представляют многоточечные краевые задачи для дифференциальных уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами, которые часто возникают в результате применения сплайнов и методов аппроксимаций в задачах приложения, в частности, в задачах оптимального управления пассажирского потока, в задачах транспортировки грузов, в задачах теории изгибов балок и т.д. Некоторые типы задачи (1)-(4) исследовались в работах [1-20]. Для изучения вопросов существования решения, непрерывной зависимости решения от исходных данных, асимптотических свойств решения, а также численного решения многоточечных краевых задач (1)-(4) использовались методы качественной теории дифференциальных уравнений, метод сравнения, метод неподвижных точек, метод верхних и нижних решений, метод конечных элементов, разностные методы и др. [1-20].

Развитие вычислительных технологий и программ требует разработки новых подходов решения многоточечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений высоких порядков с переменными коэффициентами и соответствующих математических пакетов численной реализации краевых задач. Создаваемые методы должны обеспечить нахождение эффективных

признаков разрешимости исследуемых задач, дать возможность изучению качественных свойств решений, предложить способы построения решений и др. Решение упомянутых вопросов, в первую очередь, достигается развитием конструктивных методов исследования многоточечных краевых задач для линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений высоких порядков, а также построением алгоритмов нахождения их решений.

В настоящей работе исследуются вопросы существования решения многоточечной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка (1)-(4) и способы нахождения приближенных решений. В этих целях для решения задача (1)-(4) применяется метод параметризации [21]. Ранее в работах [22, 23] указанный метод был применен к многоточечным краевым задачам для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Были установлены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости линейной многоточечной краевой задачи, существования изолированного решения многоточечной краевой задачи для нелинейного уравнения. В работе [24] эти результаты были распространены на семейства многоточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Результаты данной работы показывают эффективность условий разрешимости многоточечной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами, полученных на основе метода параметризации и качественно дополняют результаты вышеуказанных работ. Установлены достаточные условия разрешимости задачи (1)-(4) в терминах коэффициентов дифференциального уравнения, многоточечных условий и предложены алгоритмы нахождения приближенных решений. Доказана реализуемость построенного алгоритма и сходимость приближенных решений к точному решению задачи (1)-(4).

Результаты данной работы частично анонсированы в [25].

Введем следующие обозначения

$$A(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ A_3(t) & A_2(t) & A_1(t) \end{pmatrix},\quad F(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix},\quad M_i=\begin{pmatrix} \alpha_{i1} & \beta_{i1} & \gamma_{i1} \\ \alpha_{i2} & \beta_{i2} & \gamma_{i2} \\ \alpha_{i3} & \beta_{i3} & \gamma_{i3} \end{pmatrix},\quad d=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

I – единичная матрица размерности 3.

Тогда задачу (1)-(4) можно записать в векторно-матричной форме

$$\frac{du}{dt}=A(t)u+F(t),\ t\in[0,T], \tag{5}$$

$$\sum_{i=0}^{m}M_i u(t_i)=d, \tag{6}$$

где $u=col(u_1,u_2,u_3)$, $u_1(t)=z(t)$, $u_2(t)=\dfrac{dz(t)}{dt}$, $u_3(t)=\dfrac{d^2z(t)}{dt^2}$.

Решением многоточечной краевой задачи (5)-(6) является вектор-функция $u:[0,T]\to R^3$, непрерывно дифференцируемая на $[0,T]$, удовлетворяющая системе дифференциальных уравнений (5) и многоточечному условию (6).

Схема метода параметризации [21] без разбиения отрезка.

Пусть $\mu=u(t_0)$, и в задаче (5)-(6) произведем замену $u(t)=\tilde{u}(t)+\mu$:

$$\frac{d\tilde{u}}{dt}=A(t)\tilde{u}+A(t)\mu+F(t),\ t\in[0,T], \tag{7}$$

$$\tilde{u}(t_0)=0, \tag{8}$$

$$M_0\mu+\sum_{i=1}^{m}M_i\tilde{u}(t_i)+\sum_{i=1}^{m}M_i\mu=d, \tag{9}$$

Решением краевой задачи с параметром (7)-(9) является пара $(\tilde{u}(t),\mu)$, где функция $\tilde{u}(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$, удовлетворяющая системе дифференциальных уравнений (7), начальному условию (8) и краевым условиям (9).

Задачи (5)-(6) и (7)-(9) эквивалентны. Если вектор-функция $u(t)$ - решение многоточечной краевой задачи (5)-(6), то пара $(\tilde{u}(t),\mu)$, где $\tilde{u}(t)=u(t)-u(t_0)$, $\mu=u(t_0)$, будет решением краевой задачи с параметром (7)-(9). И наоборот, если пара $(\tilde{u}^*(t),\mu^*)$ - решение краевой задачи с параметром (7)-(9), то вектор-функция $u^*(t)=\tilde{u}^*(t)+\mu^*$ будет решением исходной многоточечной краевой задачи (5)-(6).

Задача (7), (8) при фиксированном μ является задачей Коши для системы трех дифференциальных уравнений, а соотношение (9) связывают значения функции $\tilde{u}(t)$ с неизвестным параметром μ.

Решение задачи Коши (7), (8) эквивалентна интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\tilde{u}(t)=\int_0^t A(\tau)\tilde{u}(\tau)d\tau+\int_0^t A(\tau)d\tau\cdot\mu+\int_0^t F(\tau)d\tau. \tag{10}$$

Вместо функции $\tilde{u}(\tau)$ подставляя правую часть интегрального уравнения (10) при $t=\tau$ и повторяя этот процесс ν-раз ($\nu=1,2,...$), получим

$$\tilde{u}(t)=D_\nu(t)\mu+G_\nu(t,\tilde{u})+\tilde{F}_\nu(t), \tag{11}$$

где $D_\nu(t)=\int_0^t A(\tau)d\tau+\int_0^t A(\tau)\int_0^\tau A(\tau_1)d\tau_1 d\tau+...+\int_0^t A(\tau)\int_0^\tau A(\tau_1)...\int_0^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}...d\tau_1 d\tau$,

$$G_\nu(t,\tilde{u})=\int_0^t A(\tau)\int_0^\tau A(\tau_1)...\int_0^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}...d\tau_1 d\tau,$$

$$\tilde{F}_\nu(t)=\int_0^t F(\tau)d\tau+\int_0^t A(\tau)\int_0^\tau F(\tau_1)d\tau_1 d\tau+...+\int_0^t A(\tau)\int_0^\tau A(\tau_1)...\int_0^{\tau_{\nu-1}} F(\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}...d\tau_1 d\tau.$$

Определим значения $\tilde{u}(t)$ при $t=t_i$, $i=\overline{1,m}$, из представления (11) и подставим их в соответствующие выражения в (9). Тогда получим

$$\left[M_0+\sum_{i=1}^m M_i[I+D_\nu(t_i)]\right]\mu=d-\sum_{i=1}^m M_i\tilde{F}_\nu(t_i)-\sum_{i=1}^m M_i G_\nu(t_i,\tilde{u}), \tag{12}$$

где I - единичная матрица размерности (3×3).

Соотношение (12) является линейной системой трех алгебраических уравнений относительно параметра μ.

Параметр μ однозначно определяется при фиксированных значениях $\tilde{u}$ и обратимости матрицы $Q_\nu(t_1,t_2,...,t_m)=M_0+\sum_{i=1}^m M_i[I+D_\nu(t_i)]$ для некоторого $\nu\in N$.

Таким образом для нахождения решения задачи (7)-(9) имеем замкнутую систему уравнений (10) и (12).

Если известна функция $\tilde{u}(t)$, то из системы алгебраических уравнений (12) можно определить параметр μ. Если известен параметр μ, то из задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (7), (8) можно найти функцию $\tilde{u}(t)$. В задаче (7)-(9) неизвестными являются как вектор-функция $\tilde{u}(t)$, так и параметр μ. Поэтому применяется итерационный метод и решение краевой задачи с параметром (7)-(9) найдем по следующему алгоритму:

0-шаг. Предположим, что матрица $Q_\nu(t_1,t_2,...,t_m)=M_0+\sum_{i=1}^{m}M_i[I+D_\nu(t_i)]$ обратима. Используем начальные условия (8): полагая в правой части системы алгебраических уравнений (12), $\tilde{u}=0$ определим параметр $\mu^{(0)}$. Из задачи Коши (7), (8) при $\mu=\mu^{(0)}$ находим функцию $\tilde{u}^{(0)}(t)$, $t\in[0,T]$.

1-шаг. Пусть матрица $Q_\nu(t_1,t_2,...,t_m)=M_0+\sum_{i=1}^{m}M_i[I+D_\nu(t_i)]$ обратима. Предполагая в правой части системы алгебраических уравнений (12) $\tilde{u}(t)=\tilde{u}^{(0)}(t)$ для всех $t\in[0,T]$, определим параметр $\mu^{(1)}$. Из задачи Коши (7), (8) при $\mu=\mu^{(1)}$ находим функцию $\tilde{u}^{(1)}(t)$, $t\in[0,T]$.

И т.д.

k-шаг. Пусть матрица $Q_\nu(t_1,t_2,...,t_m)=M_0+\sum_{i=1}^{m}M_i[I+D_\nu(t_i)]$ обратима. Полагая в правой части системы алгебраических уравнений (12) $\tilde{u}(t)=u^{(k-1)}(t)$ для всех $t\in[0,T]$, определим параметр $\mu^{(k)}$. Из задачи Коши (7), (8) при $\mu=\mu^{(k)}$ находим функцию $u^{(k)}(t)$, $t\in[0,T]$.

$k=1,2,...$.

Введем обозначение $a=\max_{t\in[0,T]}\|A(t)\|=\max\left(1,\max_{t\in[0,T]}\{|A_1(t)|+|A_2(t)|+|A_3(t)|\}\right)$.

Условия реализуемости и сходимости предложенного алгоритма, а также существования единственного решения задачи (5)-(6) приведены в следующем утверждении.

Теорема 1. *Пусть для некоторого* ν, $\nu\in N$, (3×3)*-матрица* $Q_\nu(t_1,t_2,...,t_m)=M_0+\sum_{i=1}^{m}M_i[I+D_\nu(t_i)]$ *обратима и выполнены следующие неравенства:*

a) $\|[Q_\nu(t_1,t_2,...,t_m)]^{-1}\|\le\eta_\nu(t_1,t_2,...,t_m)$;

b) $q_\nu=\eta_\nu(t_1,t_2,...,t_m)\cdot\sum_{i=1}^{m}\max_{i=\overline{1,m}}\|M_i\|\cdot\left[e^{at_i}-1-\sum_{j=1}^{\nu}\frac{[at_i]^j}{j!}\right]<1.$

Тогда многоточечная краевая задача для системы трех дифференциальных уравнений (5)-(6) имеет единственное решение.

Доказательство теоремы проводится по схеме вышеприведенного алгоритма, аналогично доказательству теоремы 1 из [22].

Таким образом, решение задачи (5)-(6) делится на два этапа:

1) решение задачи Коши для системы трех дифференциальных уравнений $[0,T]$ относительно неизвестной функции;

2) решение линейной системы трех алгебраических уравнений относительно введенного параметра.

Для нахождения решения указанных задач можно использовать математические пакеты MathCad and Matlab.

С учетом обозначений и эквивалентного перехода к задаче (5)-(6) справедлива

Теорема 2. *Пусть для некоторого* ν, $\nu\in N$, (3×3)*-матрица* $Q_\nu(t_1,t_2,...,t_m)=M_0+\sum_{i=1}^{m}M_i[I+D_\nu(t_i)]$ *обратима и выполнены неравенства a), b) теоремы 1.*

Тогда многоточечная краевая задача для дифференциального уравнения третьего порядка (1)-(4) имеет единственное решение.

Теперь, рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка (1) с периодическими краевыми условиями

$$z(0) = z(T), \tag{13}$$

$$\frac{dz(0)}{dt} = \frac{dz(T)}{dt}, \tag{14}$$

$$\frac{d^2z(0)}{dt^2} = \frac{d^2z(T)}{dt^2}. \tag{15}$$

Для задачи (1), (13)-(15) $i = 1$, $M_0 = I$, $M_1 = -I$. Пусть $\nu = 1$.

Лемма. Пусть (3×3) *-матрица* $Q_1(T) = -\int_0^T A(\tau)d\tau$ *обратима и справедливы следующие неравенства:*

a) $\|[Q_1(T)]^{-1}\| \le \eta_1(T)$; *b)* $q_1 = \eta_1(T)\cdot\left[e^{aT} - 1 - aT\right] < 1$.

Тогда периодическая краевая задача для дифференциального уравнения третьего порядка (1), (13)-(15) имеет единственное решение.

Если в дифференциальном уравнении (1) $A_1(t) = A_2(t) = A_3(t) = 0$, т.е. уравнение имеет вид $\frac{d^3z}{dt^3} = f(t)$, то определитель матрицы будет равен нулю: $\det Q_1(T) = 0$. Это остается справедливым и для матрицы $Q_\nu(T)$, $\nu = 2,3,...$

Отсюда следует, что периодическая краевая задача для дифференциального уравнения третьего порядка при отсутствии младших производных не имеет решения.

Рассмотрим теперь краевую задачу из работы [20]:

$$\frac{d^3z}{dt^3} = p(t)z + f(t) + r,\ t \in (a,b), \tag{16}$$

$$z(a) = \alpha, \tag{17}$$

$$\frac{dz(a)}{dt} = \beta_1, \tag{18}$$

$$\frac{dz(b)}{dt} = \beta_2. \tag{19}$$

Предполагается, что $f(t)$ и $p(t)$ - заданные функции и $p(t) = 0$ для $t \in [a,c) \cup (d,b]$, $a < c < d < b$, параметр r, α, β_1, β_2 - некоторые числа.

Для этой задачи

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & p(t) \end{pmatrix},\ M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{D}_\nu(a,t) = \int_a^t A(\tau)d\tau + \int_a^t A(\tau)\int_a^\tau A(\tau_1)d\tau_1 d\tau + ... + \int_a^t A(\tau)\int_a^\tau A(\tau_1)...\int_a^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}...d\tau_1 d\tau,$$

$$\nu = 1,2,...,\ \delta = \max\left(1, \max_{t\in[a,b]} |\,p(t)\,|\right).$$

Теорема 3. *Пусть для некоторого* ν, $\nu \in N$, (3×3) *-матрица* $\widetilde{Q}_\nu(a,b) = M_0 + M_1[I + \widetilde{D}_\nu(a,b)]$ *обратима и выполнены следующие неравенства:*

a) $\|[\widetilde{Q}_\nu(a,b)]^{-1}\| \le \widetilde{\eta}_\nu(a,b)$;

b) $\widetilde{q}_\nu(a,b) = \widetilde{\eta}_\nu(a,b)\cdot\left[e^{\delta(b-a)} - 1 - \sum_{j=1}^{\nu}\frac{[\delta(b-a)]^j}{j!}\right] < 1$.

Тогда двухточечная краевая задача для дифференциального уравнения третьего порядка (16)—(19) имеет единственное решение.

Отметим, что в повторных интегралах представления $\widetilde{D}_\nu(a,t)$ интегралы от элемента матрицы $A(t)$ - функции $p(t)$ будут вычисляться на интервале $[c,d]$.

Пусть $p(t)=1$ для $t\in[c,d]$, $p(t)=0$ для $t\in[a,c)\cup(d,b]$. В этом случае условия теоремы 3 будут формулироваться только в терминах чисел a, b, c, d. Справедливо

Следствие. *Пусть* (3×3) *-матрица* $\widetilde{Q}_1(a,b)=\begin{pmatrix}1 & b-a & 0\\ 0 & 1+b-a & 0\\ 0 & 1 & d-c\end{pmatrix}$ *обратима и выполнены неравенства:*

a) $\|[\widetilde{Q}_1(a,b)]^{-1}\|\le \max\left(\frac{1}{d-c},1\right)+\max\left(b-a,1,\frac{1}{d-c}\right)\frac{1}{1+b-a}$;

b) $\widetilde{q}_1(a,b)=\left[\max\left(\frac{1}{d-c},1\right)+\max\left(b-a,1,\frac{1}{d-c}\right)\frac{1}{1+b-a}\right]\cdot\left[e^{b-a}-1-(b-a)\right]<1.$

Тогда двухточечная краевая задача для дифференциального уравнения третьего порядка (16)—(19) имеет единственное решение.

Результаты данной статьи можно использовать при решении многоточечной краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка

$$\frac{d^3z}{dt^3}=f\left(t,z,\frac{dz}{dt},\frac{d^2z}{dt^2}\right),\ t\in(0,T), \tag{20}$$

с условиями (2)-(4).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Lan C. Boundary value problems for second and third order differential equations // Journal of Differential Equations. 1975. Vol. 18. P. 258-274.

[2] Samoilenko A. M., Ronto N.I. Numerical-analytic methods of investigation of solutions of boundary value problems. - Kyiv. : Naukova Dumka, 1985. - 224 p.(in Russ.).

[3] Kiguradze I.T. Boundary value problems for systems of ordinary differential equations // Modern problems of mathematics. Advancement achievements. - M. : Nauka, 1987. - Vol. 30, P. 3- 103. (in Russ.).

[4] Agarwal R.P. Existence-uniqueness and iterative methods for third-order boundary value problems // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1987. Vol. 17. P. 271-289.

[5] Samoilenko A. M., Laptinskii V. N., Kenzhebayev K. K. Constructive methods of investigation of periodic and multipoint boundary value problems // Proceedings of Institute of mathematics of NAS of Ukraine. - Kiev: Institute of mathematics of NAS of Ukraine, 1999. - Vol. 29. - 220 p. (in Russ.).

[6] Cabada A., Heikkila S. Uniqueness, comparison, and existence results for third-order initial-boundary value problems // Computers and Mathematics with Applications. 2001. Vol. 41. P. 607-618.

[7] Liu B., Yu J. Solvability of multi-point boundary value problems at resonance (II) // Applied Mathematics and Computation. 2002. V. 129. No 1. P. 119-143.

[8] Valarmathi N., Ramanujam N. An asymptotic numerical method for singularly perturbed third-order ordinary differential equations of convection-diffusion type // Computers and Mathematics with Applications. 2002. Vol. 44. P. 693-710.

[9] Yao Q. Solution and positive solution for a semilinear third-order two-point boundary value problem // Applied Mathematics Letters. 2004. Vol. 17. P. 1171-1175.

[10] Henderson J., Tisdale C.C. Five-point boundary value problems for third-order differential equations by solution matching // Mathematical and Computer Modelling. 2005. V. 42. P. 133-137.

[11] Du Z., Cai G., Ge W. A class a third-order multi-point boundary value problem // Taiwanese Journal of Mathematics. 2005. Vol. 9. No 1. P. 81-94.

[12] Du Z., Ge W., Zhou M. Singular perturbations for third-order nonlinear multi-point boundary value problem // Journal Differential Equations. 2005. Vol. 218. P. 69-90.

[13] Cabada A., Minhos F., Santos A.I. Solvability for a third-order discontinuous fully equation with nonlinear functional boundary conditions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2006. Vol. 322. P. 735-748.

[14] Li S. Positive solutions of nonlinear singular third-order two-point boundary value problem // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2006. Vol. 323. P. 413-425.

[15] Minghe P., Chang S.K. Existence and uniqueness of solutions for third-order nonlinear boundary value problems // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2007. Vol. 327. P. 23-35.

[16] Yao Q. Successive iteration of positive solution for a discontinuous third-order boundary value problem // Computers and Mathematics with Applications. 2007. Vol. 53. P. 741-749.

[17] Lin X., Du Z. Uniqueness and existence results for a third-order nonlinear multi-point boundary value problem // Applied Mathematics and Computation. 2008. V. 205. No 1. P. 187-196.

[18] Palamides A.P., Smyrlis G. Positive solutions to a singular third-order three-point boundary value problem with an indefinitely signed Green's functions // Nonlinear Analysis. 2008. Vol. 68. P. 2104-2118.

[19] Sun B., Zhao J., Yang P., Ge W. Successive iteration and positive solutions for a third-order multipoint generalized right-focal boundary value problem with p-Laplacian // Nonlinear Analysis. 2009. Vol. 70. P. 220-230.

[20] Xie S., Li P., Gao Z., Wang H. High order compact finite difference schemes for a system of third order boundary value problem // Applied Mathematics and Computation. 2012. V. 219. No 12. P. 2564-2573.

[21] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // USSR Computational mathematics and mathematical Physics. 1989. V.29. No 1. P.34-46.

[22] Dzhumabaev D.S., Imanchiev A.E. Well-posedness of linear multi-point boundary value problem // Mathematical journal. 2005. V. 5. No 1. P. 30-38. (in Russ.).

[23] Dzhumabaev D.S., Imanchiev A.E. Criteria of existence izolated solution of multi-point boundary value problem for system of ordinary differential equations // Izvestiya NAN RK. 2010. No 3. P. 117-121. (in Russ.).

[24] Asanova A.T. About of the solvability of family multi-point boundary value problems for system of differential equations and their applications to nonlocal boundary value problems // Mathematical journal. 2013. V. 13. No 3. P. 38-42. (in Russ.).

[25] Assanova A.T., Imanchiev A.E. On the solvability of a multi-point boundary value problem for a differential equations third order // Тез.докл. межд. науч. конф."Актуальные проблемы матем. и матем. моделир.", посв. 50-лет. созд. ИММ АН КазССР, Алматы, 1-5 июня 2015г. С. 110-112.

REFERENCES

[1] Lan C. *Boundary value problems for second and third order differential equations.* Journal of Differential Equations. 1975. Vol. 18. P. 258-274.

[2] Samoilenko A. M., Ronto N.I. *Numerical-analytic methods of investigation of solutions of boundary value problems.* - Kyiv. : Naukova Dumka, 1985. - 224 p.(in Russ.).

[3] Kiguradze I.T. *Boundary value problems for systems of ordinary differential equations // Modern problems of mathematics. Advancement achievements.* - M. : Nauka, 1987. - Vol. 30, P. 3- 103. (in Russ.).

[4] Agarwal R.P. *Existence-uniqueness and iterative methods for third-order boundary value problems.* Journal of Computational and Applied Mathematics. 1987. Vol. 17. P. 271-289.

[5] Samoilenko A. M., Laptinskii V. N., Kenzhebayev K. K. *Constructive methods of investigation of periodic and multi-point boundary value problems.* Proceedings of Institute of mathematics of NAS of Ukraine. - Kiev: Institute of mathematics of NAS of Ukraine, 1999. - Vol. 29. - 220 p. (in Russ.).

[6] Cabada A., Heikkila S. *Uniqueness, comparison, and existence results for third-order initial-boundary value problems.* Computers and Mathematics with Applications. 2001. Vol. 41. P. 607-618.

[7] Liu B., Yu J. *Solvability of multi-point boundary value problems at resonance (II).* Applied Mathematics and Computation. 2002. V. 129. No 1. P. 119-143.

[8] Valarmathi N., Ramanujam N. *An asymptotic numerical method for singularly perturbed third-order ordinary differential equations of convection-diffusion type.* Computers and Mathematics with Applications. 2002. Vol. 44. P. 693-710.

[9] Yao Q. *Solution and positive solution for a semilinear third-order two-point boundary value problem.* Applied Mathematics Letters. 2004. Vol. 17. P. 1171-1175.

[10] Henderson J., Tisdale C.C. *Five-point boundary value problems for third-order differential equations by solution matching.* Mathematical and Computer Modelling. 2005. V. 42. P. 133-137.

[11] Du Z., Cai G., Ge W. *A class a third-order multi-point boundary value problem.* Taiwanese Journal of Mathematics. 2005. Vol. 9. No 1. P. 81-94.

[12] Du Z., Ge W., Zhou M. *Singular perturbations for third-order nonlinear multi-point boundary value problem.* Journal Differential Equations. 2005. Vol. 218. P. 69-90.

[13] Cabada A., Minhos F., Santos A.I. *Solvability for a third-order discontinuous fully equation with nonlinear functional boundary conditions.* Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2006. Vol. 322. P. 735-748.

[14] Li S. *Positive solutions of nonlinear singular third-order two-point boundary value problem.* Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2006. Vol. 323. P. 413-425.

[15] Minghe P., Chang S.K. *Existence and uniqueness of solutions for third-order nonlinear boundary value problems.* Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2007. Vol. 327. P. 23-35.

[16] Yao Q. *Successive iteration of positive solution for a discontinuous third-order boundary value problem.* Computers and Mathematics with Applications. 2007. Vol. 53. P. 741-749.

[17] Lin X., Du Z. *Uniqueness and existence results for a third-order nonlinear multi-point boundary value problem.* Applied Mathematics and Computation. 2008. V. 205. No 1. P. 187-196.

[18] Palamides A.P., Smyrlis G. *Positive solutions to a singular third-order three-point boundary value problem with an indefinitely signed Green's functions.* Nonlinear Analysis. 2008. Vol. 68. P. 2104-2118.

[19] Sun B., Zhao J., Yang P., Ge W. *Successive iteration and positive solutions for a third-order multipoint generalized right-focal boundary value problem with p-Laplacian.* Nonlinear Analysis. 2009. Vol. 70. P. 220-230.

[20] Xie S., Li P., Gao Z., Wang H. *High order compact finite difference schemes for a system of third order boundary value problem.* Applied Mathematics and Computation. 2012. V. 219. No 12. P. 2564-2573.

[21] Dzhumabayev D.S. *Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation.* USSR Computational mathematics and mathematical Physics. 1989. V.29. No 1. P.34-46.

[22] Dzhumabaev D.S., Imanchiev A.E. *Well-posedness of linear multi-point boundary value problem.* Mathematical journal. 2005. V. 5. No 1. P. 30-38. (in Russ.).

[23] Dzhumabaev D.S., Imanchiev A.E. *Criteria of existence izolated solution of multi-point boundary value problem for system of ordinary differential equations.* Izvestiya NAN RK. 2010. No 3. P. 117-121. (in Russ.).

[24] Asanova A.T. *About of the solvability of family multi-point boundary value problems for system of differential equations and their applications to nonlocal boundary value problems.* Mathematical journal. 2013. V. 13. No 3. P. 38-42. (in Russ.).

[25] Assanova A.T., Imanchiev A.E. *On the solvability of a multi-point boundary value problem for a differential equations third order.* Tez.dokl. mejd. nauch. conf."Aktual'nye problemy matem. i matem. modelir.", posv. 50-let. sozd. IMM AN KazSSR, Almaty, 1-5 iyunia 2015g. S. 110-112.

ҮШІНШІ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН КӨПНҮКТЕЛІ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ БІРМӘНДІ ШЕШІЛІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ

А. Т. Асанова[1], А. Е. Иманчиев[2]

[1]ҚР БҒМ Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан,
[2]ҚР БҒМ Қ.Жұбанов ат. Ақтөбе өңірлік мемлекеттік университеті, Ақтөбе, Қазақстан

Тірек сөздер: теңдеу, көпнүктелі, шешілімділік, параметр, алгоритм.

Аннотация. Коэффициенттері айнымалы үшінші ретті дифференциалдық теңдеу үшін көпнүктелі шеттік есеп қарастырылады. Қарастырылып отырған есептің жалғыз шешімінің бар болуы мәселелері мен оны тұрғызу тәсілдері зерттеледі. Жаңа функциялар енгізу арқылы коэффициенттері айнымалы үшінші ретті дифференциалдық теңдеу үшін көпнүктелі шеттік есеп үш дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін көпнүктелі шеттік есепке келтірілген. Алынған көпнүктелі шеттік есепті шешуге параметрлеу әдісі қолданылады. Үш дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін көпнүктелі шеттік есептің жуық шешімдерін табу алгоритмдері құрылған және олардың жинақтылығы дәлелденген. Үш дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін көпнүктелі шеттік есептің бірмәнді шешілімділігі шарттары бастапқы берілімдер терминдерінде тағайындалған және шешімін табу алгоритмдері ұсынылған. Нәтижелер алғашқы коэффициенттері айнымалы үшінші ретті дифференциалдық теңдеулер үшін көпнүктелі шеттік есепке қатысты да тұжырымдалған. Алынған нәтижелер үшінші ретті жәй дифференциалдық теңдеу үшін периодты шеттік есепке қолданылады. Ұсынылған тәсілдің қосымшаларда пайда болатын үшінші ретті дифференциалдық теңдеулер үшін екінүктелі шеттік есептерді шешудегі тиімділігі көрсетілген. Нәтижелер үшінші ретті дифференциалдық теңдеулер үшін бейсызық көпнүктелі шеттік есептерді зерттеу және шешу барысында пайдаланылуы да мүмкін.

Поступила 15.15.2015 г.