N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 5, Number 303 (2015), 151 – 158

CORRESPONDENCE OF THE KERR AND HARTLE-THORNE METRICS

K. A. Boshkayev[1,2], Sh. S. Suleymanova[1], Ye. K. Aimuratov[1,2], B. A. Zhami[1], S. Toktarbay[1], A. S. Taukenova[1], Zh. A. Kalymova[1]

[1]IETP, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,
[2]ICRANet, Piazza della Repubblica 10, Pescara, I-65122, Italy.
E-mail: kuantay@mail.ru

Key words: Einstein's equations, exact solutions, approximate solutions, the Kerr metric, the Hartle-Thorne metric.

Abstract. In this work we consider the procedure of comparison the exterior solutions of the Einstein gravitational field equations such as the approximate Hartle-Thorne solution and the exact Kerr solution. To this end, the Kerr metric in the Boyer-Lindquist coordinates was expanded in the Taylor series accurate within the quadratic terms in the rotation parameter, and thereby was presented in the approximate form. Furthermore, the coordinate transformations with a given accuracy, which link the approximate Kerr and Hartle-Thorne solutions were found using the methods of the perturbation theory. Despite the fact that the quadrupole moment implicitly enters into the Kerr metric, it was shown that one can express it via the angular momentum and the total mass of the source of the gravitational field. Thus, it was demonstrated that the physical quantities contained in the Hartle-Thorne solution such as the total mass, angular momentum and quadrupole moment directly connected to the total mass and the rotation parameter of the Kerr solution. The coordinate transformations obtained here can be used to write the Hartle-Thorne metric in the Boyer-Lindquist coordinates, and in turn it is equivalent to the approximate Kerr solution with the quadrupole parameter. From the practical standpoint, the approximate Kerr solution with the quadrupole parameter has wider application for the description of the geometry around real objects, because in the absence of the quadrupole momentum the solution reduces to the initial approximate Kerr solution within the accuracy up to the second order terms in the rotation parameter. The present theoretical study is pure review and methodological in nature. Nevertheless, the results can find their direct application in celestial mechanics, X-ray astronomy and astrophysics for studying the motion of celestial bodies in the field of slowly rotating and slightly deformed sources of the gravitational field.

СООТВЕТСТВИЕ МЕТРИК КЕРРА И ХАРТЛА-ТОРНА

К. А. Бошкаев[1,2], Ш. С. Сулейманова[1], Е. К. Аймуратов[1,2], Б. А. Жами[1], С. Токтарбай[1], А. С. Таукенова[1], Ж. А. Калымова[1]

[1]НИИЭТФ, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан,
[2]ICRANet, Piazza della Repubblica 10, Pescara, I-65122, Italy

Ключевые слова: уравнения Эйнштейна, точные решения, приближенные решения, метрика Керра, метрика Хартла-Торна.

Аннотация. В работе рассматривается процедура сопоставления внешних решений уравнений гравитационного поля Эйнштейна, таких как приближённое решение Хартла-Торна и точное решение Керра. Для целей сопоставления, метрика Керра была разложена в ряд Тейлора в координатах Бойера-Линдквиста с точностью до квадратичных членов по параметру вращения, и тем самым, представлена в приближенном виде. Далее с помощью методов теории возмущения были найдены координатные преобразования заданной точности, связывающие приближённые решения Керра и Хартла-Торна. Несмотря на то, что в метрику Керра

квадрупольный момент входит неявно, было показано, что его можно выразить через угловой момент и полную массу источника гравитационного поля. Таким образом, было продемонстрировано, что физические величины, входящие в решение Хартла-Торна, такие как полная масса, угловой момент и квадрупольный момент непосредственно связаны с полной массой и параметром вращения в решении Керра. Координатные преобразования, полученные здесь, могут быть использованы для написания метрики Хартла-Торна в координатах Бойера-Линдквиста, что свою очередь эквивалентно приближённому решению Керра с квадрупольным параметром. С практической стороны, приближённое решение Керра с квадрупольным параметром имеет более широкое прикладное применение для описания геометрии вокруг реальных объектов, так как при отсутствии квадрупольного момента решение сводится к исходному приближённому решению Керра с точностью до второго порядка по параметру вращения. Данное теоретическое исследование носит чисто обзорный и методический характер. Тем не менее, ее результаты могут найти свое непосредственное применение в небесной механике, в рентгеновской астрономии и астрофизике для изучения движения небесных тел в поле медленно вращающихся и слегка деформированных источников гравитационных полей.

Введение. Метрика Керра является точным вакуумным решением уравнений гравитационного поля Эйнштейна в общей теории относительности, описывающая геометрию вокруг вращающихся незаряженных тел, тем самым обобщает метрику Шварцшильда с учётом параметра вращения [1]. Решение Керра – единственное известное точное решение, которое может служить для описания стационарного осесимметричного асимптотически-плоского поля вне массивного вращающегося объекта с двумя основными параметрами, такими как масса и параметр Керра (параметр вращения). Согласно научному консенсусу, решение Керра является, по-видимому, единственно возможным внешним решением для вращающихся чёрных дыр [2]. Следует отметить, что существует также метрика Керра-Ньюмена, для вращающихся, но заряженных чёрных дыр, которая при отсутствии заряда переходит в метрику Керра [3, 4]. Из метрики Керра следует, что около половины массы чёрной дыры теоретически может быть извлечено в виде энергии вращения [5]. Этот вывод имеет существенное значение для моделей квазаров и активных ядер галактик, в которых чёрные дыры рассматриваются в качестве центрального источника всех видов излучения [5]. Однако, до сих пор не удалось найти внутреннее решение Керра даже в приближённом виде [6]. Данный факт показывает, что метрика Керра может применяться только для ограниченного класса астрофизических объектов, и оно не подходит для описания внешнего поля вращающихся реальных объектов [6].

Решение Хартла-Торна, часто применяемое в литературе для описания геометрии вокруг медленно вращающихся и слегка деформированных объектов в сильных гравитационных полях, характеризуется тремя мультипольными моментами, такими как полная масса, угловой момент, и квадрупольный момент [7, 8]. Эти параметры, в свою очередь, позволяют описать реальные астрофизические объекты от планетаподобных небесных тел вплоть до нейтронных звезд [9, 10]. Одной из наиболее важных характеристик этого семейства решений является то, что соответствующие уравнения состояния были построены с использованием реалистичных моделей внутренней структуры релятивистских звёзд. Полуаналитические и численные обобщения метрики Хартла-Торна с более сложными уравнениями состояния были предложены различными авторами [11]. Наиболее полный обзор этих решений приведён в [12]. Во всех этих случаях, однако, предполагается, что мультипольные (квадрупольные и октупольные) моменты относительно невелики и вращение медленное.

Целью статьи является сопоставление метрики Хартла-Торна, являющейся приближённым решением уравнений Эйнштейна, с приближённой метрикой Керра.

Структура статьи организована следующим образом: сначала мы рассмотрим внешнее решение Хартла-Торна и кратко прокомментируем его наиболее важные свойства. После этого представим метрику Керра в координатах Бойера-Линдквиста, а также введём ряд новых координат, которые дают возможность сравнить эти две метрики. Кроме того, мы найдём в явном виде преобразование координат, устанавливающее связь между метриками Керра и Хартла-Торна. В статье используется геометрическая система единиц, т.е. гравитационная постоянная и скорость света равны единице $G = c = 1$. При необходимости восстановления значения G и c, в тексте об этом будет упомянуто.

Метрика Хартла-Торна. С учётом поправок второго порядка малости по угловой скорости, структура компактных объектов может быть приближённо описана с помощью полной массы, углового момента и квадрупольного момента. Важным следствием этого приближения является то, что уравнения равновесия сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Хартл и Торн [7, 8] исследовали гравитационное поле вращающихся звёзд в приближении медленного вращения. Этот формализм можно применить к большинству компактных объектов, в том числе и к пульсарам с миллисекундными периодами вращения.

Дополнительным свойством этого формализма является то, что он может быть использован для сшивания внутренней метрики с приближённой внешней метрикой. В связи с этим, стоит отметить, что проблема сшивания внутренних и внешних решений подразумевает многие математические и физические трудности [12], в том числе вычисление метрических функций и координат на поверхности сшивания, а также физическое поведение таких внутренних параметров, как давление и плотность распределения вещества.

Внешнее решение Хартла-Торна. Метрика Хартла-Торна в координатах (t, R, Θ, φ), описывающая внешнее поле медленно вращающегося и слегка деформированного объекта имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} ds^2 = &\left(1-\frac{2M}{R}\right)\left[1+2k_1P_2(\cos\Theta)+2\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{-1}\frac{J^2}{R^4}\left(2\cos^2\Theta-1\right)\right]dt^2 \\ &-\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{-1}\left[1-2k_2P_2(\cos\Theta)-2\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{-1}\frac{J^2}{R^4}\right]dR^2 \\ &-R^2\left[1-2k_3P_2(\cos\Theta)\right]\left(d\Theta^2+\sin^2\Theta d\varphi^2\right)+\frac{4J}{R}\sin^2\Theta dt d\varphi \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$k_1 = \frac{J^2}{MR^3}\left(1+\frac{M}{R}\right)+\frac{5}{8}\frac{Q-J^2/M}{M^3}Q_2^2\left(\frac{R}{M}-1\right),$$

$$k_2 = k_1-\frac{6J^2}{R^4},$$

$$k_3 = k_1+\frac{J^2}{R^4}+\frac{5}{4}\frac{Q-J^2/M}{M^2R}\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{-1/2}Q_2^1\left(\frac{R}{M}-1\right),$$

являются функциями координаты R. В свою очередь, функции

$$Q_2^1(x) = \left(x^2-1\right)^{1/2}\left[\frac{3x}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}-\frac{3x^2-2}{x^2-1}\right],$$

$$Q_2^2(x) = \left(x^2-1\right)\left[\frac{3}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}-\frac{3x^2-5x}{\left(x^2-1\right)^2}\right],$$

являются присоединёнными полиномами Лежандра второго рода, тогда как $P_2(\cos\Theta) = (1/2)(3\cos^2\Theta-1)$ является обыкновенным полиномом Лежандра и $x = R/M-1$. Константы M, J и Q являются полной массой, угловым моментом и квадрупольным моментом вращающегося объекта, соответственно. Этот вид метрики исправляет некоторые опечатки в исходной работе Хартла и Торна [7, 8] (см. также [13] и [14]).

В общем случае данная метрика представляет собой приближённое вакуумное решение с точностью до второго порядка по угловому моменту J и до первого порядка по квадрупольному моменту Q. В случае обычных звёзд, таких как Солнце, в учёте гравитационной постоянной G и скорости света c, метрика (1) может быть упрощена из-за малости параметров:

$$\frac{GM_{Sun}}{c^2 R_{Sun}} \approx 2\times 10^{-6}, \quad \frac{GJ_{Sun}}{c^3 R_{Sun}^2} \approx 10^{-12}, \quad \frac{GQ_{Sun}}{c^2 R_{Sun}^3} \approx 10^{-10}. \tag{2}$$

Для этого частного случая можно вычислить соответствующую приближённую метрику из (1) в пределе $c \to \infty$. Расчёты эти просты и приводят метрику к следующему виду

$$\begin{aligned} ds^2 \approx & \left[1-\frac{2GM}{c^2R}+\frac{2GQ}{c^2R^3}P_2(\cos\Theta)+\frac{2G^2MQ}{c^4R^4}P_2(\cos\Theta)\right]c^2dt^2+\frac{4GJ}{c^2R}\sin^2\Theta dt d\varphi \\ & -\left[1+\frac{2GM}{c^2R}-\frac{2GQ}{c^2R^3}P_2(\cos\Theta)\right]dR^2-\left[1-\frac{2GQ}{c^2R^3}P_2(\cos\Theta)\right]R^2\left(d\Theta^2+\sin^2\Theta d\varphi^2\right) \end{aligned} \tag{3}$$

Она описывает гравитационное поле для широкого спектра небесных тел, и только в случае очень плотных $(GM \sim c^2R)$ или быстро вращающиеся $GJ \sim c^3R^2$ объектов появляются большие расхождения.

В случае, когда источник не вращается и его угловая скорость равна нулю $\Omega = 0$, то, соответственно, $J = 0$, $Q = 0$ и решение Хартла-Торна сводится к точному внешнему решению Шварцшильда в стандартных координатах. В отсутствии квадрупольного момента, решение Хартла-Торна сводится к решению Лензе-Тирринга при сохранении линейных членов по угловому моменту. Также можно показать, что в отсутствии углового момента, метрику Хартла-Торна можно сопоставить с приближённым решением Эреца-Розена, используя соответствующие координатные преобразования. Для этого метрику Эреца-Розана разлагают в ряд с точностью до линейных членов по квадрупольному параметру [13]. Однако, эти вычисления выходят за рамки данной статьи и здесь не рассмотрены. С другой стороны, логично было бы предположить, что метрику Хартла-Торна можно сопоставить с приближённой метрикой Керра в отсутствии квадрупольного момента, сохраняя угловой момент. В данной статье мы выясним, почему вышеуказанное предположение ещё никем не было показано. В связи с этим, мы будем следовать работе Хартла и Торна и покажем, что приближённая метрика Керра с точностью до квадратичных членов по параметру вращения сопоставляется с метрикой Хартла-Торна, только лишь в единственном случае, когда присутствует подлинный квадрупольный момент источника поля, определяемый посредством углового момента.

Следует отметить, что в отличие от точных аксиально симметричных, стационарных и асимптотически плоских решений уравнений Эйнштейна, внешняя метрика Хартла-Торна имеет свой внутренний аналог, т.е. внутреннюю метрику. Именно это отличие метрики Хартла-Торна делает её популярной в научной сфере и дает ей более широкий прикладной характер.

Метрика Керра. Для описания гравитационного поля вращающегося тела вне источника, физически разумно предположить, что внешняя вакуумная метрика должна быть асимптотически плоской. В этом случае, первым очевидным кандидатом является решение Керра в соответствующем пределе. Метрику Керра [1] в координатах (t, r, θ, φ) Бойера-Линдквиста [15] можно записать в виде:

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left(1-\frac{2mr}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right)dt^2-\frac{r^2+a^2\cos^2\theta}{r^2-2mr+a^2}dr^2-\left(r^2+a^2\cos^2\theta\right)d\theta^2 \\ & -\left(r^2+a^2+\frac{2mra^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right)\sin^2\theta\, d\varphi^2+\frac{4mra\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}dt\, d\varphi \end{aligned} \tag{4}$$

где m - полная масса и a - параметр вращения источника поля.

Напомним, что при отсутствии параметра вращения $a = 0$, метрика Керра сводится к точной внешней метрике Шварцшильда в стандартных координатах. Тогда будет очевидно, что полные массы в метриках Керра и Хартла-Торна идентичны, т.е. $m = M$. Если разложить метрику Керра с точностью до линейных членов по параметру вращения, то мы, несомненно, получим метрику Лензе-Тирринга, откуда следует, что параметр вращения тела непосредственно связан с угловым моментом тела $a = J/m = J/M$ [13].

Для сопоставления метрик Керра и Хартла-Торна, метрику Керра необходимо разложить в ряд Тейлора по квадратичным членам параметра вращения, чтобы обе метрики обладали одинаковыми приближениями (точностью). Для удобства вычислений введём параметр разложения ε, который прямо пропорционален угловому моменту (угловой скорости) тела. Таким образом, с помощью замены $a \to a\varepsilon$ и разложения её по ε до членов порядка $\sim \varepsilon^2$ получим:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{2ma^2\varepsilon^2\cos^2\theta}{r^3}\right)dt^2 - \left(\frac{r}{r-2m} - \frac{a^2\varepsilon^2\left(r + 2m\cos^2\theta - r\cos^2\theta\right)}{r(r-2m)^2}\right)dr^2 - \\ - \left(1 + \frac{a^2\varepsilon^2\cos^2\theta}{r^2}\right)r^2 d\theta^2 - \left(1 + \frac{a^2\varepsilon^2}{r^2}\left(1 + \frac{2m\sin^2\theta}{r}\right)\right)r^2\sin^2\theta d\varphi^2 + \frac{4ma\varepsilon\sin^2\theta}{r}d\varphi dt. \quad (5)$$

Для того, чтобы установить взаимосвязь между двумя аксиально-симметричными метриками, представим координаты в метрике Керра как функцию от координат метрики Хартла-Торна, то есть в виде $r = r(R,\Theta)$, $\theta = \theta(R,\Theta)$. Тогда с помощью теории возмущения координатные преобразования нужно искать следующим образом: $r = R + a^2\varepsilon^2 f_1(R,\Theta)$, $\theta = \Theta + a^2\varepsilon^2 f_2(R,\Theta)$, где $f_1(R,\Theta)$ и $f_2(R,\Theta)$ - искомые функции. Дифференциалы координат, соответственно, будут иметь вид:

$$dr = \frac{\partial r}{\partial R}dR + \frac{\partial r}{\partial \Theta}d\Theta = \left(1 + a^2\varepsilon^2\frac{\partial f_1(R,\Theta)}{\partial R}\right)dR + a^2\varepsilon^2\frac{\partial f_1(R,\Theta)}{\partial \Theta}d\Theta, \\ d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial R}dR + \frac{\partial \theta}{\partial \Theta}d\Theta = a^2\varepsilon^2\frac{\partial f_2(R,\Theta)}{\partial R}dR + \left(1 + a^2\varepsilon^2\frac{\partial f_2(R,\Theta)}{\partial \Theta}\right)d\Theta. \quad (6)$$

После этого, решение Керра запишется в координатах R и Θ

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{R} + \frac{2J^2\varepsilon^2}{MR^3}\left\{\cos^2\Theta + Rf_1(R,\Theta)\right\}\right)dt^2 - \\ - \left(\frac{R}{R-2M} - \frac{2J^2\varepsilon^2}{M^2(R-2M)^2}\left\{\frac{1}{2}\sin^2\Theta + \frac{M}{R}\cos^2\Theta + Mf_1(R,\Theta) - R(R-2M)\frac{\partial f_1(R,\theta)}{\partial R}\right\}\right)dR^2 \\ - \left(1 + \frac{2J^2\varepsilon^2}{M^2R^2}\left\{\frac{1}{2}\cos^2\Theta + Rf_1(R,\Theta) + R^2\frac{\partial f_2(R,\Theta)}{\partial \Theta}\right\}\right)R^2 d\Theta^2 \\ - \left(1 + \frac{2J^2\varepsilon^2}{M^2R^2}\left\{\frac{1}{2} + \frac{M}{R}\sin^2\Theta + Rf_1(R,\Theta) + \frac{\cos\Theta}{\sin\Theta}R^2 f_2(R,\Theta)\right\}\right)R^2\sin^2\Theta d\varphi^2 \\ - \frac{2J^2\varepsilon^2 R}{M^2(R-2M)}\left(\frac{\partial f_1(R,\Theta)}{\partial \Theta} + R(R-2M)\frac{\partial f_2(R,\Theta)}{\partial R}\right)dRd\Theta + \frac{4J\varepsilon\sin^2\Theta}{R}d\varphi dt \quad (7)$$

где мы воспользовались заменой $a = J/M$.

Теперь метрика Керра записана в тех же координатах, что и метрика Хартла-Торна. Принимая во внимание тот факт, что метрики аксиально-симметричные, нас интересуют только g_{tt} и $g_{\varphi\varphi}$ компоненты метрического тензора, так как именно эти компоненты остаются инвариантными величинами из-за вышеуказанной аксиальной симметрии. Следовательно, приравнивая компоненты метрического тензора с их аналогами в метрике Хартла-Торна, с предварительной заменой $J \to J\varepsilon$, $Q \to Q\varepsilon^2$, мы находим искомые функции $f_1(R,\Theta)$ и $f_2(R,\Theta)$:

$$f_1(R,\Theta)=\frac{5}{8}\frac{Q-J^2/M}{M^3}\left(\frac{MR^2}{J^2}\right)\left(1-\frac{2M}{R}\right)Q_2^2(x)P_2(\cos\Theta)$$
$$-\frac{1}{2R}\left[\left(1+\frac{2M}{R}\right)\left(1-\frac{M}{R}\right)-\cos^2\Theta\left(1-\frac{2M}{R}\right)\left(1+\frac{3M}{R}\right)\right] \tag{8}$$

$$f_2(R,\Theta)=\frac{5}{8}\frac{Q-J^2/M}{M^3}\left(\frac{MR}{J^2}\right)\left\{\frac{2M^2}{R^2}\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{-1/2}Q_2^1(x)-\left(1-\frac{M}{R}\right)Q_2^2(x)\right\}P_2(\cos\Theta)\tan\Theta$$
$$-\frac{1}{2R^2}\left(1+\frac{2M}{R}\right)\cos\Theta\sin\Theta,$$

где по-прежнему $x=R/M-1$.

Теперь рассмотрим $g_{R\Theta}$ компоненту метрического тензора в выражении (7). Поскольку в исходных метриках Керра и Хартла-Торна $g_{R\Theta}$ компонента метрического тензора отсутствует, нам необходимо подставить в неё значения функций $f_1(R,\Theta)$ и $f_2(R,\Theta)$, а также найти условие, при выполнении которого $g_{R\Theta}$ обнуляется. В результате получается, что единственное условие, удовлетворяющее данному требованию – это выражение квадрупольного момента через угловой момент, т.е. $Q=J^2/M$. Появление такого квадрупольного момента носит чисто релятивистский характер.

После того, как Хартл и Торн [7, 8] получили данное алгебраическое выражение, основываясь на работе Эрнандеса [16], величина $Q=Q_{Kerr}=J^2/M$ стала называться в научной литературе «Керровским квадрупольным моментом», так как она исключительно определятся с помощью отношения квадрата углового момента к массе.

С учётом Керровского квадрупольного момента, преобразование координат имеет следующий вид:

$$r=R-\frac{a^2}{2R}\left[\left(1+\frac{2M}{R}\right)\left(1-\frac{M}{R}\right)-\cos^2\Theta\left(1-\frac{2M}{R}\right)\left(1+\frac{3M}{R}\right)\right],$$
$$\theta=\Theta-\frac{a^2}{2R^2}\left(1+\frac{2M}{R}\right)\cos\Theta\sin\Theta \tag{9}$$

Эти координатные преобразования переводят решение Керра (5) в решение Хартла-Торна (1) с точностью до второго порядка по угловому моменту, с заменой $m=M$, $a=J/M$, и специфическим квадрупольным параметром $Q=J^2/M$. Таким образом, мы показали, что приближённое решение Керра эквивалентно внешнему решению Хартла-Торна с определённым значением квадрупольного параметра.

Для обратного перехода из метрики Хартла-Торна в метрику Керра координатные преобразования (9) нужно записать в виде $R(r,\theta)$ и $\Theta(r,\theta)$:

$$R=r+\frac{a^2}{2r}\left[\left(1+\frac{2m}{r}\right)\left(1-\frac{m}{r}\right)-\cos^2\theta\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(1+\frac{3m}{r}\right)\right],$$
$$\Theta=\theta+\frac{a^2}{2r^2}\left(1+\frac{2m}{r}\right)\cos\theta\sin\theta \tag{10}$$

с тем же приближением $\sim\varepsilon^2$. Здесь также нужно учесть алгебраические соотношения между параметрами обеих метрик: $m=M$, $a=J/M$, и $Q=J^2/M$.

Заметим, что введя новый безразмерный квадрупольный параметр $\delta = (1/M^3)(Q - J^2/M)$ в исходную метрику Хартла-Торна, и, воспользовавшись координатными преобразованиями (10) в приближении $\sim \varepsilon^2$, можно получить приближённую метрику Керра с квадрупольным параметром. Данная метрика известна в литературе как «квази-Керровская метрика» [17, 18] и широко применяется для описания процессов вокруг компактных объектов, таких как гравитационные волны, квази-периодические осцилляции и т.д. [19, 20]. Очевидно, что для $a = J/M$, и $Q = J^2/M$ квази-Керровская метрика сводится к обычной приближённой метрике Керра (5). Это и объясняет её удобное прикладное значение в различных астрофизических расчётах [21, 22].

Заключение. В статье было рассмотрено соответствие приближённых решений уравнений Эйнштейна, таких как метрика Керра и метрика Хартла-Торна в сильных гравитационных полях с медленным вращением. В общем случае, когда метрика Керра имеет точный, а не приближённый вид, она описывает гравитационное поле быстро вращающихся компактных объектов. Тем не менее, тот факт, что квадрупольный момент в решении Керра полностью определяется угловым моментом, является признаком того, что оно может быть применено только для описания гравитационного поля определённого класса компактных объектов, например, чёрных дыр. В свою очередь, метрика Хартла-Торна характеризует гравитационное поле медленно вращающихся и слегка деформированных реальных компактных астрофизических объектов.

При получении соответствия двух решений мы приняли во внимание, что метрика Хартла-Торна задана с точностью до второго порядка по угловой скорости вращения. По этой же причине метрика Керра была рассмотрена в таком же приближении. С помощью методов теории возмущения мы искали преобразования координат для данного приближения. После того, как две метрики были записаны в одинаковых координатах, были найдены координатные преобразования и связь между квадрупольным моментом в метрике Хартла-Торна и параметром вращения в метрике Керра.

В статье все преобразования координат были рассчитаны с тем же приближением, что и метрические функции в исходном решении Хартла-Торна. Поэтому процедуру сопоставления метрик, представленную здесь, можно аналогичным образом распространить и на другие приближённые и точные решения. Для сопоставления только точных решений ситуация обстоит совсем иначе. Здесь нужны новые методы, разработка которых нуждается в дальнейших исследованиях.

ЛИТЕРАТУРА

[1] R.P. Kerr, *Phys. Rev. Lett.*, **1963**, 11, 237.
[2] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis, The large-scale structure of space-time (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1973).
[3] E.T. Newman, A.I. Janis, *Journal of Mathematical Physics*, **1965**, 6 (6), 915-917.
[4] E.T. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash, R. Torrence, *Journal of Mathematical Physics*, **1965**, 6 (6), 918-919.
[5] H.C. Ohanian, R. Ruffini, Gravitation and Spacetime, 3rd Edition (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2013).
[6] K.A. Boshkayev, H. Quevedo, R. Ruffini, *Physical Review D*, **2012**, 86, 064043.
[7] J.B. Hartle, *The Astrophysical Journal*, **1967**, 150, 1005.
[8] J.B. Hartle, K.S. Thorne, *The Astrophysical Journal*, **1968**, 153, 807.
[9] E. Berti, N. Stergioulas, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **2004**, 350, 1416.
[10] E. Berti, F. White, A. Maniopoulou, M. Bruni, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **2005**, 358, 923.
[11] N. Andersson, G. L. Comer, *Classical Quantum Gravity*, **2001**, 18, 969.
[12] N. Stergioulas, *Living Rev. Relativity*, **2003**, 6, 3.
[13] D. Bini, A. Geralico, O. Luongo, H. Quevedo, *Classical Quantum Gravity*, **2009**, 26, 225006.
[14] O. Benhar, V. Ferrari, L. Gualtieri, S. Marassi, *Phys. Rev. D*, **2005**, 72, 044028.
[15] R.H. Boyer, R.W. Lindquist, *Journal of Mathematical Physics*, **1967**, 8(2), 265-281.
[16] W.C. Hernandez, *Physical Review*, **1967**, 159 (5), 1070-1072.
[17] K. Glampedakis, S. Babak, *Classical and Quantum Gravity*, **2006**, 23 (12), 4167-4188.
[18] T. Johannsen, D. Psaltis, *The Astrophysical Journal*, **2011**, 726 (1), 10.
[19] T. Johannsen, D. Psaltis, *The Astrophysical Journal*, **2010**, 716 (1), 187-197.
[20] D. Psaltis, T. Johannsen, *The Astrophysical Journal*, **2012**, 745 (1), 6.
[21] A.E. Broderick, T. Johannsen, A. Loeb, D. Psaltis, *The Astrophysical Journal*, **2014**, 784 (1), 14.
[22] Ch. Liu, S. Chen, J. Jing, *Journal of High Energy Physics*, **2012**, 2012, 97.

REFERENSES

[1] R.P. Kerr, *Phys. Rev. Lett.*, **1963**, 11, 237 (in Eng.).
[2] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis, The large-scale structure of space-time (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1973) (in Eng.).
[3] E.T. Newman, A.I. Janis, *Journal of Mathematical Physics*, **1965**, 6 (6), 915-917 (in Eng.).
[4] E.T. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash, R. Torrence, *Journal of Mathematical Physics*, **1965**, 6 (6), 918-919 (in Eng.).
[5] H.C. Ohanian, R. Ruffini, Gravitation and Spacetime, 3rd Edition (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2013) (in Eng.).
[6] K.A. Boshkayev, H. Quevedo, R. Ruffini, *Physical Review D*, **2012**, 86, 064043 (in Eng.).
[7] J.B. Hartle, *The Astrophysical Journal*, **1967**, 150, 1005 (in Eng.).
[8] J.B. Hartle, K.S. Thorne, *The Astrophysical Journal*, **1968**, 153, 807 (in Eng.).
[9] E. Berti, N. Stergioulas, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **2004**, 350, 1416 (in Eng.).
[10] E. Berti, F. White, A. Maniopoulou, M. Bruni, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **2005**, 358, 923 (in Eng.).
[11] N. Andersson, G. L. Comer, *Classical Quantum Gravity*, **2001**, 18, 969 (in Eng.).
[12] N. Stergioulas, *Living Rev. Relativity*, **2003**, 6, 3 (in Eng.).
[13] D. Bini, A. Geralico, O. Luongo, H. Quevedo, *Classical Quantum Gravity*, **2009**, 26, 225006 (in Eng.).
[14] O. Benhar, V. Ferrari, L. Gualtieri, S. Marassi, *Phys. Rev. D*, **2005**, 72, 044028 (in Eng.).
[15] R.H. Boyer, R.W. Lindquist, *Journal of Mathematical Physics*, **1967**, 8(2), 265-281 (in Eng.).
[16] W.C. Hernandez, *Physical Review*, **1967**, 159 (5), 1070-1072 (in Eng.).
[17] K. Glampedakis, S. Babak, *Classical and Quantum Gravity*, **2006**, 23 (12), 4167-4188 (in Eng.).
[18] T. Johannsen, D. Psaltis, *The Astrophysical Journal*, **2011**, 726 (1), 10 (in Eng.).
[19] T. Johannsen, D. Psaltis, *The Astrophysical Journal*, **2010**, 716 (1), 187-197 (in Eng.).
[20] D. Psaltis, T. Johannsen, *The Astrophysical Journal*, **2012**, 745 (1), 6 (in Eng.).
[21] A.E. Broderick, T. Johannsen, A. Loeb, D. Psaltis, *The Astrophysical Journal*, **2014**, 784 (1), 14 (in Eng.).
[22] Ch. Liu, S. Chen, J. Jing, *Journal of High Energy Physics*, **2012**, 2012, 97 (in Eng.).

КЕРР ЖӘНЕ ХАРТЛ-ТОРН МЕТРИКАЛАРЫНЫҢ СӘЙКЕСТІГІ

Қ. А. Бошқаев[1,2], Ш. С. Сулейманова[1], Е. Қ. Аймұратов[1,2], Б. А. Жәми[1], С. Тоқтарбай[1], Ә.С. Таукенова[1], Ж. А. Қалымова[1]

[1]ЭТФҒЗИ, Әл-Фараби атындағы ҚазҰУ, Алматы, 050040, Қазақстан
[2]ICRANet, Piazza della Repubblica 10, Pescara, I-65122, Italy

Тірек сөздер: Эйнштейн теңдеулері, дәл шешімдер, жуық шешімдер, Керр метрикасы, Хартл-Торн метрикасы.

Аннотация. Жұмыста Эйнштейннің гравитациялық өріс теңдеулерінің сыртқы шешімдері болып табылатын Хартл-Торнның жуық шешімі мен Керрдің дәл шешімін салыстыру рәсімі қарастырылды. Салыстыру мақсатында, Керр метрикасы Бойер-Линдквист координаттарында айналу параметрі бойынша квадраттық мүшеге дейінгі дәлдікпен Тейлор қатарына жіктеліп, жуықталған түрінде жазылды. Одан кейін ұйытқу теориясының әдістерінің көмегімен алдын-ала бекілтілген дәлдікпен жуықталған Керр және Хартл-Торн шешімдерін байланыстыратын координаттық түрлендірулер табылды. Керр метрикасына квадрупольдік моменттің айқын түрде кірмеуіне қарамастан, оны гравитациялық өріс көзінің бұрыштық моменті және толық массасы арқылы анықтауға болатыны көрсетілді. Осылайша, Хартл-Торн метрикасындағы толық масса, бұрыштық момент және квадрупольдік момент сияқты физикалық шамалар Керр метрикасындағы толық массамен және айналу параметрімен тікелей байланысты екендігі көрсетілді. Осында алынған координаттық түрлендірулерді Хартл-Торн метрикасын Бойер-Линдквист координаттарында жазу үшін қолдануға болады, ол өз кезегінде квадрупольдік параметрі бар жуық Керр шешіміне пара-пар. Практикалық тұрғыдан қарастырғанда, квадрупольдік параметрі бар жуық Керр шешімі шынайы объектілердің айналасындағы геометрияны сипаттау үшін кең қолданысқа ие, себебі квадрупольдік момент болмаған жағдайда шешім айналу параметрі бойынша екінші ретті дәлдікпен бастапқы Керрдің жуық шешіміне келеді. Бұл теориялық зерттеу таза методикалық сипатқа ие және осы тақырып шеңберіндегі жұмыстарды шолу мақсатында жазылған. Дегенмен, оның нәтижелерін аспан механикасында, рентгендік астрономияда және астрофизикада баяу айналатын және аздап деформацияланған денелердің гравитациялық өрісіндегі аспан денелерінің қозғалысын зерттеу үшін тікелей қолдануға болады.

Поступила 15.15.2015 г.