N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 6, Number 304 (2015), 66 – 70

RESEARCHES OF DIFFERENTIAL EQUALIZATIONS OF SPATIAL MOTIONS OF FLEXIBLE CONNECTIONS AND THEIR SOLUTION BY THE METHOD OF DESCRIPTIONS

A. Barayev[1], M. Zh. Zhumabayev[1], A. Zh. Baimisheva[1], A. D. Niyazymbetov[1], M. Bariyev[2]

[1]South-Kazakhstan state pedagogical institute, Shymkent, Kazakhstan,
[2]Tashkent state technical university, Uzbekistan.
E-mail: baraev42@mail.ru

Keywords: differential, equalizations spatial, motions.

Abstract. Differential equalizations of spatial motion of flexible connections are investigated and a task is solved with the use of method of descriptions. Speed of distribution of longitudinal and transversal waves arising up at the dynamic affecting flexible connection is determined.

УДК ф539,625

ИССЛЕДОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ГИБКИХ СВЯЗЕЙ И ЕЕ РЕШЕНИЯ МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК

А. Бараев[1], М. Ж. Жумабаев[1], А. Ж. Баймишева[1], А. Д. Ниязымбетов,[1] М. Бариев[2]

[1]Южно-Казахстанский государственный педагогический институт, Шымкент, Казахстан,
[2]Ташкентский государственный технический университет, Узбекистан

Ключевые слова: дифференциальные, уравнения, пространственные, движения.

Аннотация. Исследованы дифференциальные уравнения пространственного движения гибких связей и решена задача с применением метода характеристик. Определены скорость распространения продольных и поперечных волн, возникающих при динамическом воздействии на гибкой связи.

Дифференциальные уравнения пространственного движения гибкой нити и геометрическая связь имеют вид [1]:

$$\rho_0\,\ddot{x} = \left[\sigma^*\,(1+\varepsilon)^{-1}(1+x')\right]' + P_1^*(s,t),$$

$$\rho_0\,\ddot{y} = \left[\sigma^*\,(1+\varepsilon)^{-1}\,y'\right]' + P_2^*(s,t),$$

$$\rho_0\,\ddot{z} = \left[\sigma^*\,(1+\varepsilon)^{-1}\,z'\right]' + P_3^*(s,t), \tag{1}$$

$$(1+\varepsilon)\cos\alpha = 1+x',\ (1+\varepsilon)\cos\beta = y',\ (1+\varepsilon)\cos\gamma = z', \tag{2}$$

где t – время; s – лагранжева координата; $x(s,t)$, $y(s,t)$, $z(s,t)$ – координаты рассматриваемой точки нити в декартовой системе координат (x,y,z); $\sigma^* = \sigma^*(s,t)$ –

натяжение; $\varepsilon(s,t)$ – относительная деформация; $P_1^*(s,t)$, $P_2^*(s,t)$, $P_3^*(s,t)$ – составляющие массовой силы $\vec{P}=\vec{P}(s,t)$ на оси x, y, z соответственно; $\alpha(s,t)$, $\beta(s,t)$, $\gamma(s,t)$ – углы, образованные между касательной к нити данной точке и осями координат, x, y, z; ρ_0 – плотность недеформированной нити ($i=1,2,3$).

Здесь и в дальнейшем введем обозначения :

$$(\dot{\cdot})=\partial(\cdot)/\partial t(\cdot),\ (\cdot)'=\partial(\cdot)/\partial s,\ d_E(\cdot)=d(\cdot)/d\varepsilon, d_T(\cdot)=d(\cdot)/dt\ ,$$

$$\sigma(s,t)=\sigma^*(s,t)/\rho_0,\ P_i(s,t)=P_i^*(s,t)/\rho_0.$$

Дифференциальные уравнения геометрической связи (2) являются неголономными, т.е. раздельно от основных дифференциальных уравнений (1) не интегрируются.

Пусть материал нити деформируется по произвольно заданному нелинейному закону:

$$\sigma=\sigma(\varepsilon) \tag{3}$$

Подставляя (3) в уравнении (1), получим:

$$(1+\varepsilon)\ddot{x}=(1+x')\sigma'+\sigma\varsigma\left[(1+\varepsilon)x''-(1+x')(1+\varepsilon)'\right]+Đ_1(s,t),$$

$$(1+\varepsilon)\ddot{y}=y'\sigma'+\sigma\varsigma\left[(1+\varepsilon)y''-y'(1+\varepsilon)'\right]+Đ_2(s,t),$$

$$(1+\varepsilon)\ddot{z}=z'\sigma'+\sigma\varsigma\left[(1+\varepsilon)z''-z'(1+\varepsilon)'\right]+Đ_3(s,t),\ \varsigma=(1+\varepsilon)^{-1}. \tag{4}$$

Отсюда видно, что дифференциальные уравнения пространственного движения гибкой нити, являются нелинейными относительно первых производных перемещения. Подстановка уравнения связи приводит к возрастанию степени нелинейности дифференциальных уравнений движения. Из уравнения (2) найдем:

$$(1+\varepsilon)^2=(1+x')^2+(y')^2+(z')^2\ ,(1+\varepsilon)\ (1+\varepsilon)'=(1+x')x''+y'y''+z'z''. \tag{5}$$

учитывая, что $\sigma'=d_E\sigma\ (1+\varepsilon)'$ дифференциальные уравнения движения (4) представим в виде:

$$\ddot{x}=\xi_{11}x''+\xi_{12}y''+\xi_{13}z''+P_1(s,t),$$

$$\ddot{y}=\xi_{21}x''+\xi_{22}y''+\xi_{23}z''+P_2(s,t)$$

$$\ddot{z}=\xi_{31}x''+\xi_{32}y''+\xi_{33}z''+P_3(s,t), \tag{6}$$

где

$$\xi_{11}=h\varsigma^3\ (1+x')^2+\sigma\varsigma,\ \xi_{12}=\xi_{21}=h\varsigma^3\ (1+x')y',\ \xi_{23}=\xi_{32}=h\varsigma^3\ y'z'$$

$$\xi_{22}=h\varsigma^3\ (y')^2+\sigma\varsigma,\ \xi_{33}=h\varsigma^3\ (z')^2+\sigma\varsigma,\ h=\left[(1+\varepsilon)d_E\sigma-\sigma\right].$$

При заданном законе деформирования (3), материала уравнения (6), служат для определения перемещения частиц нити $x(s,t)$, $y(s,t)$, $z(s,t)$. Коэффициенты ξ_{ij} являются нелинейными функциями первых производных искомых перемещений. Поэтому решения краевых задач о плоском или пространственном движении гибкой нити с помощью известных методов (например, метод разделения переменных, метод распространяющихся волн и т.д.) оказываются трудными. Наиболее эффективным при решении прикладных задач является метод характеристик[2]:.

Пусть $w(s,t)=0$ есть уравнение характеристической кривой.

Наряду с уравнениями (6), будем рассматривать следующие соотношения для полных производных искомых функций:

$$d(\dot{x})-k\,d(x')=f_1(s,t)dt+P_1(s,t)dt,$$
$$d(\dot{y})-k\,d(y')=f_2(s,t)dt+P_2(s,t)dt,$$
$$d(\dot{z})-k\,d(z')=f_3(s,t)dt+P_3(s,t)dt, \qquad (7)$$

где $f_j(s,t)$ – неизвестные пока функции; $k=d_T s$ – угловой коэффициент касательной к кривой $w(s,t)=0$; $j=1,2,3$.

Функции $f_j(s,t)$ в общем случае не могут одновременно равняться нулю, так как в противном случае уравнения (1), или (6) можно было бы представить в виде трех независимых волновых уравнений, описывающих движение нити в проекциях на оси x, y, z раздельно.

Учитывая, что $(\dot{x})'=(x')^{\cdot}$, $(\dot{y})'=(y')^{\cdot}$, $(\dot{z})'=(z')^{\cdot}$, уравнения (7) приводим к виду:

$$\ddot{x}=k^2x''+f_1(s,t)+P_1(s,t),$$
$$\ddot{y}=k^2y''+f_2(s,t)+P_2(s,t),$$
$$\ddot{z}=k^2z''+f_3(s,t)+P_3(s,t). \qquad (8)$$

Уравнения (8) служат для определения неизвестных функций $f_j(s,t)$, где $j=1,2,3$. Подставляя выражения (8) в систему (6), будем иметь:

$$(\xi_{11}-k^2)x''+\xi_{12}y''+\xi_{13}z''=f_1(s,t), \qquad (9)$$
$$\xi_{21}x''+(\xi_{22}-k^2)y''+\xi_{23}z''=f_2(s,t), \qquad (10)$$
$$\xi_{31}x''+\xi_{32}y''+(\xi_{33}-k^2)z''=f_3(s,t). \qquad (11)$$

На характеристической кривой $w(s,t)=0$ вторые производные x'', y'' и z'' имеют не единственные значения, поэтому системы уравнения (9) – (11) является линейно зависимыми, т.е. основной определитель данной системы равен нулю:

$$(\xi_{11}-k^2)(\xi_{22}-k^2)(\xi_{33}-k^2)+\xi_{13}\xi_{21}\xi_{32}+\xi_{12}\xi_{23}\xi_{31}-\xi_{13}\xi_{31}(\xi_{22}-k^2)-$$
$$-\xi_{12}\xi_{21}(\xi_{33}-k^2)-\xi_{32}\xi_{23}(\xi_{11}-k^2)=0 \qquad (12)$$

Чтобы найти характеристические корни уравнения (12), уравнения (10) и (11) умножим на неизвестные пока коэффициенты λ и μ соответственно и рассмотрим сумму всех трех уравнений системы (9)–(11):

$$(\xi_{11}-k^2+\lambda\xi_{21}+\mu\xi_{31})x''+[\xi_{12}+\lambda(\xi_{22}-k^2)+\mu\xi_{32}]y''+$$
$$[\xi_{13}+\lambda\xi_{23}+\mu(\xi_{33}-k^2)]z''=f_1(s,t)+\lambda f_2(s,t)+\mu f_3(s,t). \qquad (13)$$

Далее потребуем, чтобы коэффициенты при производных x'' и z'' были равны нулю (так как λ и μ – произвольные коэффициенты); в результате получаем следующую систему:

$$\xi_{11}-k^2+\lambda\xi_{21}+\mu\xi_{31}=0,$$
$$\xi_{13}+\lambda\xi_{23}+\mu(\xi_{33}-k^2)=0, \qquad (14)$$
$$[\xi_{12}+\lambda(\xi_{22}-k^2)+\mu\xi_{32}]y''=f_1(s,t)+\lambda f_2(s,t)+\mu f_3(s,t). \qquad (15)$$

Решая уравнение (14) относительно λ и μ, получаем

$$\lambda=((k^2-\xi_{11})(k^2-\xi_{33})-\xi_{13}\xi_{31})/(\xi_{21}(k^2-\xi_{33})+\xi_{23}\xi_{31}), \qquad (16)$$

$$\mu = \left(\left(k^2 - \xi_{11}\right)\xi_{23} + \xi_{13}\xi_{21}\right) / \left(\xi_{21}\left(k^2 - \xi_{33}\right) + \xi_{23}\xi_{31}\right) \tag{17}$$

или, исключая коэффициенты ξ_{ij}, будем иметь:

$$\lambda = \frac{(1+\varepsilon)^3 k^2 - (1+\varepsilon)^2 \sigma - hg}{h\,(1+x')y'},$$

$$\mu = \frac{z'}{1+x'}, \text{ где: } g=(z')^2 + (1+x')^2. \tag{18}$$

Рассмотрим уравнение (15). На характеристических кривых $w(s,t) = 0$ производная y'' имеет не единственное значение. Это условие будет выполнено тогда и только тогда, когда правая часть и коэффициент при производной y'' уравнения (15) одновременно равняются нулю, т.е:

$$\xi_{12} + \lambda\left(\xi_{22} - k^2\right) + \mu\xi_{32} = 0, \tag{19}$$

$$f_1(s,t) + \lambda f_2(s,t) + \mu f_3(s,t) = 0. \tag{20}$$

Исключая коэффициенты ξ_{ij} и подставляя в уравнение (19) значения λ и μ из (18), получим:

$$\varsigma^3\left(k^2 - \sigma\varsigma\right)\{(1+\varepsilon)d_E\sigma - \sigma\}\left[(1+x')^2 + (y')^2 + (z')^2\right] - \left(k^2 - \sigma\varsigma\right)^2 = 0.$$

Учитывая выражение (5), отсюда найдем:

$$k_{1,2} = (d_T s)_{1,2} = \pm\sqrt{d_E\sigma}, \quad k_{3,4} = (d_T s)_{3,4} = \pm\sqrt{\sigma\varsigma}. \tag{21}$$

Таким образом, динамическая нагрузка вдоль рассматриваемой гибкой нити распространяется в сторону роста параметра s и в обратном направлении с двумя различными скоростями: $k_{1,2}$ и $k_{3,4}$. Волны, распространяющиеся со скоростью $k_{1,2}$, называются продольными волнами, а $k_{3,4}$ – поперечными. В дальнейшем берем значение скорости только в сторону роста параметра s, т. е только с одним индексом.

Из выражения (16) следует, что коэффициент λ является функцией параметра k^2, а коэффициент μ от этого параметра не зависит:

$$\lambda_1(k_1) = \left((1+\varepsilon)^3 d_E\sigma - (1+\varepsilon)^2\sigma - hg\right) / h\,(1+x')y'; \; \mu = -g/(1+x')y'$$

где

$$g=(z')^2 + (1+x')^2, \; h=\left[(1+\varepsilon)d_E\sigma - \sigma\right].$$

Умножим уравнения (7) на λ и μ соответственно и сложим все уравнения системы (7):

$$d(\dot{x}) + \lambda d(\dot{y}) + \mu d(\dot{z}) - k\left[d(x') + \lambda d(y') + \mu d(z')\right] - \left(P_1 + \lambda P_2 + \mu P_3\right)dt =$$
$$= \left(f_1 + \lambda f_2 + \mu f_3\right)dt. \tag{22}$$

Согласно выражению (20), правая часть последнего уравнения равняется нулю

$$d(\dot{x}) + \lambda d(\dot{y}) + \mu d(\dot{z}) - k\left[d(x') + \lambda d(y') + \mu d(z')\right] - \\ - \left(P_1 + \lambda P_2 + \mu P_3\right)dt = 0 \tag{23}$$

Подставляя в уравнение (23) соответствующие значения λ и μ, получаем:

$$\left\{(1+\varepsilon)^3 d_E\sigma-(1+\varepsilon)^2\sigma-h\ g\right\}d\ (\dot{y})+y'\ (1+x')h\ d\ (\dot{x})+x'z'hd\ (\dot{z})+$$
$$+y'\ (1+x')h\ d\ (\dot{x})+x'z'hd\ (\dot{z})+$$
$$+\sqrt{d_E\sigma}\ \left\{(1+\varepsilon)^3 d_E\sigma-(1+\varepsilon)^2\sigma-h\ g\right\}d\ (y')+\sqrt{d_E\sigma}x'\ (1+x')hd\ (x')+$$
$$+\sqrt{d_E\sigma}\ y'z'\ h\ d\ (z')-\left\{(1+\varepsilon)^3 d_E\sigma-(1+\varepsilon)^2\sigma-h\,g\right\}Đ_2\ d\,t-$$
$$h\ (y'\ (1+x')P_1+y'z'\ P_3)d\,t=0 \qquad (24)$$

$$(1+x')y'\ d(\dot{x})-g\,d(\dot{y})+y'z'd(\dot{z})\mp$$
$$\mp\sqrt{\sigma\varsigma}\ \left[(1+x')y'\ d(x')-g\,d(y')+y'z'd(z')\right]=$$
$$=\left[(1+x')y'\ P_1(s,t)-g\ \ P_2(s,t)+y'z'\,P_3(s,t)\right]d\,t \qquad (25).$$

где $g=(z')^2+(1+x')^2$, $h=\left[(1+\varepsilon)d_E\sigma-\sigma\right]$.

Эквивалентность уравнения (24), (25) исходным уравнениям (1) или (6), можно проверить путем прямой подстановки.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Рахматулин Х.А., Демьянов Ю.А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках: Изд. 2-е, допол. – М.: Университетская книга; Логос, 2009. – 512 с.

[2] Бараев А. Вопросы теории распространения нелинейных волн в нитях и гибких связях. – Алматы: Наш мир, 2006. – 272 с.

REFERENCES

[1] Rakhmatulin H.A., Demyanov Yu.A. Durability under intensive short-term loads: Ed.2 supplemented. M.: University Book; Logos, 2009. 512 p. (in Russ.).

[2] Baraev A. Problems in the theory of nonlinear waves in the strands and flexible connections. Almaty: Nash mir, 2006. 272 p. (in Russ.).

ИКЕМДІ БАЙЛАНЫСТАРДЫҢ КЕҢІСТІК ҚОЗҒАЛЫСТАҒЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫ ТЕҢДЕУЛЕРІН ЖӘНЕ ОНЫҢ СИПАТТАМА ӘДІСІ АРҚЫЛЫ ШЕШІЛУІН ЗЕРТТЕУ

А. Бараев[1], М. Ж. Жұмабаев[1], А. Ж. Баймишева[1], А. Д. Ниязымбетов[1], М. Бариев[2]

[1]Онтүстік Қазақстан мемлекеттік педагогикалық институты, Шымкент, Қазақстан,
[2]Ташкент мемлекеттік техникалық университеті, Өзбекстан

Тірек сөздер: дифференциалды, теңдеулер, кеңістік, қозғалыстар.

Аннотация. Икемді байланыстардың кеңістік қозғалыстағы дифференциалды теңдеулері зерттелген және сипаттама әдісін қолдану арқылы мәселесі шешілген. Икемді байланыстардағы серпінді әсері арқылы пайда болған бойлық пен көлденең толқындар тарату жылдамдығы анықталған.

Поступила 03.11.2015 г.