N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 6, Number 304 (2015), 118 – 121

UDC 517.9

ABOUT STRONG RESOLVABILITY OF A TASK OF CAUCHY-DIRIKHLE OF THE EQUATION OF HEAT CONDUCTIVITY WITH THE DEVIATING ARGUMENT

Orazov I.O., Saprygina M.B., Shaldanbayev A.Sh.

The southern Kazakhstan state university of M. Auyezov, Shymkent
shaldanbaev51@mail.ru

Keywords: the heat conductivity equation, own functions, attached functions, deviating argument.

Abstract. In the real work, method of division of variables and the spectral theory of the equation with we otklonyashchitsya by argument, strong resolvability of a task of Cauchy-Dirikhle of the equation of heat conductivity with отклоняющмся argument is shown. A deviation from Carleman's class.

УДК 517.9

АРГУМЕНТІ АУЫТҚЫҒАН ЖЫЛУ ТЕҢДЕУІНІҢ КОШИ-ДИРИХЛЕ ЕСЕБІНІҢ КҮШТІ ШЕШІЛУІ ТУРАЛЫ

Оразов И.О., Сапрыгина М.Б., Шалданбаев А.Ш.

М.Әуезов атындағы Оңтүстік-қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент қаласы

Кілт сөздер: жылу теңдеуі, меншікті функциялар, қосарлас функциялар,ауытқыған аргумент.

Аннотация. Бұл еңбекте аргументі ауытқыған жылу теңдеуінің Коши-Дирихле есебінің күшті шешілетіні көрсетілген.Зерттеу барысында айнымалыларды ажырату әдісі мен аргументі ауытқыған теңдеудің спектрәлді теориясы қолданылған.

1. Кіріспе. Аргументі ауытқыған теңдеулердің теориясы көптеген авторлардың зерттеулеріне арқау болды,атап айтар болсақ, А.Д. Мышкис [1], Л.Э. Эльсгольц пен С.Б. Норкиннің [2],әйгілі,монографияларында оларға дейінгі жургізілген зерттулерге шолу жасалып,тиісті қорытындылар жасалған. Аргументі ауытқыған Штурм-Лиувилл теңдеуінің шекаралық есептері С.Б. Норкиннің [3] еңбегінде зерттелген.Осы,және басқа көптеген еңбектерде ауытқу теңдеудің жоғарғы ретті мүшелерінде кездеседі.Ауытқуы спектрәлдік параметрінде кездесетін жағдайға арналған еңбектерді саусақпен санауға болады,осы орайда, Т.Ш. Кальменов, С.Т. Ахметова и А.Ш. Шалданбаев [4], А.М. Ибраимкулов [5], Т.Ш. Кальменов, А.Ш. Шалданбаев [6]-[9] еңбектерін атаған жөн сыйақты. Функционалдық анализдің ұғымдарымен [10] –[13],ал шекаралық есептердің спектрәлдік мәселелерімен [14] –[23],еңбектерде танысуға болады.

Бұл еңбек [4] еңбектің жалғасы іспетті,және оның нәтиежелеріне сүйенеді,көпке мәлім,жылу теңдеуінің аргументін ауытқысақ не болады деген сұраққа жауап береді.Бұл сәтте дискретті спектр пайда болады екен,және бұл есептің ерекшелігі болса керек.

Ω – дегеніміз AB: $0 \le t \le T$, $x = 0$; BC: $0 \le x \le l$, $t = T$; CD: $0 \le t \le T$, $x = l$; DA: $0 \le x \le l$, $y = 0$ кесінділерінен жасалған тіктөртбұрыш болсын . $C^{2,1}(\Omega)$ – дегеніміз Ω

аймағында t бойынша бір рет, ал x бойынша екі рет үздіксіз дифференциалданатын функциялар жиыны болсын. Бұл Ω-аймағының шекарасы $\Gamma = AB \cup AD \cup CD$ жиынын айталық.

Коши-Дирихле есебі. Кез келген $f(x,t) \in L^2(\Omega)$ үшін, мына,

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x,t) = f(x,t) \qquad (1)$$

$$u\big|_{t=0} = u\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=l} = 0\,; \qquad (2)$$

шекаралық есептің шешімін табамыз.

2.Зерттеу әдістері

Жоғарыдағы (3)-(4) спектрәлді есепке айнымалыларды ажырату әдісін қолданамыз,нәтиежесінде Штурм-Лиувилдің Дирихле есебі мен аргументі ауытқыған Кошидің есебін аламыз.Бірінші есептің шешімі көпшілікке мәлім,ал екінш есеп егжей- тегжейлі [4] еңбекте зерттелген,сондықтан тек алынған нәтиежелерді тұжырымдаумен шектелеміз.

3.Алынған нәтиежелер

ТЕОРЕМА 1. Мына,

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x,t) = f(x,t) \qquad (3)$$

$$u\big|_{t=0} = u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0\,. \qquad (4)$$

шекаралық есептің бірегей күшті шешімі бар болуы үшін,мына,

$$\frac{\pi T}{l^2} \neq \frac{2n + \frac{1}{2}}{m^2}, \qquad (5)$$

шарттың $\forall\ n = 0,1,2...;\ m = 1,2,...$ үшін орыналуы қажетті әрі жеткілікті.

Осы шарт орындалғанда, мынадай,

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(f, u_{mn})}{\lambda_{mn}}\right|^2 \prec +\infty \qquad (6)$$

барлық $f(x,t) \in L^2(\Omega)$ функциялары үшін (1) - (2) шекаралық есебінің, мынадай,

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(f, u_{mn})}{\lambda_{mn}} \cdot u_{mn}(x,t) \qquad (7)$$

бірегей шешімі бар. Мұндағы ,

$$\lambda_{mn} = (-1)^n\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{T} - \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2,\ n = 0,1,2...;\ m = 1,2,...$$

$$u_{mn}(x,t) = \frac{2}{\sqrt{Tl}} \cdot \sin\frac{m\pi}{l}x \cdot \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{T},\ \ n = 0,1,2...;\ m = 1,2,...$$

ТЕОРЕМА 2. Мына,

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x,t) = f(x,t), \qquad (8)$$

$$u\big|_{t=0} = u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0 \qquad (9)$$

шекаралық есеп күшті шешілуі үшін, мына,

$$\inf_{m,n}|\lambda_{mn}| \succ K \succ 0,\ n = 0,1,2...;\ m = 1,2,...$$

теңсіздігінің орындалуы қажетті әрі жеткілікті.

ТЕОРЕМА 3. Мына,

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x,t),$$

$$u\big|_{t=0} = u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0$$

оператордың қабындысы $\overline{L}$ жалқы оператор, яғни $\left(\overline{L}\right)^* = \overline{L}$.

Жоғарыдағы 1 және 3 теоремаларынан, келесі, теорема туындайды

ТЕОРЕМА 4. Егер кез келген $n = 0,1,2...$; $m = 1,2,...$ мәндері үшін

$$\frac{\pi T}{l^2} \neq \frac{2n + \frac{1}{2}}{m^2},$$

шарттары орындалса, онда $\overline{L}^{-1}$ -кері операторы бар, және ол жалқы оператор.

4.Талқылау

Аргументті ауытқыту нәтижесінде спектр пайда болды,сондықтан сызықтық операторлардың спектрәлдік теорясын қолдануға мүмкіндік болды. Оператор мен оның қабындысының спектрі әртүрлі болары белгілі,бірақ біз оншалықты терең бойламадық.

ӘДЕБИЕТ

[1] Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом М. -1972. - 352 с.

[2] Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом М.- 1971.- 296 с.

[3] Норкин С.Б. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом М. -1965.- 356 с.

[4] Кальменов Т.Ш. Ахметова С. Шалданбаев А.Ш. К спектральной теории уравнений с отклоняющимся аргументом // Математический журнал, Алматы.- 2004.- Т. 4, № 3. - С. 41-48.

[5] Ибраимкулов А.М. О спектральных свойствах краевой задачи для уравнения с отклоняющимся аргументом // Известия АН.Каз.ССР, сер.физ.-мат.- 1988.- № 3.- С. 22-25.

[6] T. Sh. Kal'menov, and A. Sh. Shaldanbaev, On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 18, 352-369 (2010).

[7] I. Orazov, A. Shaldanbayev, and M. Shomanbayeva, About the Nature of the Spectrum of the Periodic Problem for the Heat Equation with a Deviating Argument, Abstract and Applied Analysis, Volume 2013 (2013), Article ID 128363, 6 pages, http://dx.doi.org/10.1155/2013/128363

[8] Шалданбаев А.Ш. Спектральные разложения корректных-некорректных начально краевых задач для некоторых классов дифференциальных уравнений.- Монография. 193с,LAP LAMBEPT Academic Pyblishing. http://dnb.d-nb.de. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011,Germanu.

[9] Т.Ш. Калменов. Краевые задачи для линейных уравнений в частных

[10] производных гиперболического типа, Шымкент.:Ғылым, 1993.-327 б.

[11] Г.Е. Шилов. Математический анализ. Специальный курс.: Физмат, 1960.

[12] Г. Вейль. Избранные труды, Наука, 1984. -510с.

[13] М. Рид , Б. Саймон. Методы современной математической физики,М.: Мир, 1977, 278-285 б.

[14] У. Рудин. Функциональный анализ,М.: Мир, 1975. -443 б.

[15] G.D. Birkhoff. One the asymptotic character of the sotutions of certain. Linear differentiol equations containing a parametr, Trans, Amer. Math. Soc 9. (1908). Стр 219-231.

[16] Я.Д. Тамаркин. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. П.Г. тип. М.П. Фроловой 1917.

[17] F.Browder . On the eigenfunction and eigenvalues on the general. Linear. Miptic differential operators, Proc,Nat. Acad. ScUSA, t . 39 (1953) 433-439.

[18] T.Carleman. Uber die asymptotische Verelung der ligenwerte partiller. Differen tialgleichungen Ber. Sachs Akad. Wiss .zu Leipzig. Math. Phus, klass 88(1936) 119-134.

[19] М.В. Келдыш. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосоряженных уравнений, ДАН СССР, 1951. том LXXVII, № 1. с.11-14.

[20] М.А. Наймарк. Линейные дифференциальные операторы, II –ое издание, М: Наука, 1969,526 с.

[21] В.А. Марченко. Операторы Штурма Лиувилля и их приложения,Киев: Наукова думка, 1977,329 с.

[22] Н.И. Ахиезер, Н.М. Глазман. Теория линейных операторов в гилбертовом пространстве ,М.: Наука, 1966, 543с.

[23] Б.М. Левитан, И.С. Саргсян. Введение в спектральную теорию,М.: Наука ,1970, 67 с.

[24] М.О. Отелбаев. Оценки спектра оператора Штурма-Лиувилля, Алма-ата, Ғылым, 1990, с.187.

REFERENCES

[1] Myshkis A.D. Linejnye differencial'nye uravnenija s zapazdyvajushhim argumentom M. -1972. - 352 s.

[2] Jel'sgol'c L.Je., Norkin S.B. Vvedenie v teoriju differencial'nyh uravnenij s otklonjajushhimsja argumentom M.- 1971.- 296 s.

[3] Norkin S.B. Differencial'nye uravnenija s zapazdyvajushhim argumentom M. -1965.- 356 s.

[4] Kal'menov T.Sh. Ahmetova S. Shaldanbaev A.Sh. K spektral'noj teorii uravnenij s otklonjajushhimsja argumentom // Matematicheskij zhurnal, Almaty.- 2004.- T. 4, № 3. - S. 41-48.

[5] Ibraimkulov A.M. O spektral'nyh svojstvah kraevoj zadachi dlja uravnenija s otklonjajushhimsja argumentom // Izvestija AN.Kaz.SSR, ser.fiz.-mat.- 1988.- № 3.- S. 22-25.

[6] T. Sh. Kal'menov, and A. Sh. Shaldanbaev, On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 18, 352-369 (2010).
[7] I. Orazov, A. Shaldanbayev, and M. Shomanbayeva, About the Nature of the Spectrum of the Periodic Problem for the Heat Equation with a Deviating Argument, Abstract and Applied Analysis, Volume 2013 (2013), Article ID 128363, 6 pages, http://dx.doi.org/10.1155/2013/128363
[8] Shaldanbaev A.Sh. Spektral'nye razlozhenija korrektnyh-nekorrektnyh nachal'no kraevyh zadach dlja nekotoryh klassov differencial'nyh uravnenij.- Monografija. 193c,LAP LAMBEPT Academic Pyblishing. http://dnb.d-nb.de. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011,Germanu.
[9] T.Sh. Kalmenov Kraevye zadachi dlja linejnyh uravnenii v chastnyh proizvodnyh giperbolicheskogo tipa.- Shymkent.:Fylym, 1993.-327 b.
[10] G.E. Shilov Matematicheskij analiz. Special'nyj kurs.: Fizmat, 1960.
[11] G. Vejl' Izbrannye trudy, Nauka, 1984. -510s.
[12] M. Rid , B. Sajmon Metody sovremennoj matematicheskoj fiziki.-M.: Mir, 1977.- 278-285 b.
[13] U. Rudin Funkcional'nyj analiz. –M.: Mir, 1975. -443 b.
[14] G.D. Birkhoff. One the asymptotic character of the sotutions of certain. Linear differentiol equations containing a parametr, Trans, Amer. Math. Soc 9. (1908). Str 219-231.
[15] Ja.D. Tamarkin. O nekotoryh obshhih zadachph teorija obyknovennyh linejnyh differencial'nyh uravnenij. P.G. tip. M.P. Fromovoj 1917.
[16] F.Browder . On the eigenfunction and eigenvalues on the general. Linear. Miptic differential operators, Proc,Nat. Acad. ScUSA, t . 39 (1953) 433-439.
[17] T.Carleman. Uber die asymptotische Verelung der ligenwerte partiller. Differen tialgleichungen Ber. Sachs Akad. Wiss .zu Leipzig. Math. Phus, klass 88(1936) 119-134.
[18] 18 M.V. Keldysh. O sobstvennyh znachenijah i sobstvennyh funkcijah nekotoryh klassov neasmosorjazhennyh uravnenij II DAI SSSR, 1951. tom LXXVII, № 1. CII-14.
[19] M.A. Najmark. Linejnye, differencial'noe operatory II –oe izdanie –M: Nauka 1969-526s.
[20] V.A. Marchenko. Operatory Shturma-Liuvillja i ih prilozhenija-kiev: Naukova dumka. 1977-329s.
[21] N.I. Ahiezer N.M. Glazman. Teorija linejnyh operatorov v gilbertovom prostranstve –M. Nauka 1966. 543s.
[22] B.M. Levitan, I.S. Sargsjan. Vvedenie v spektral'nuju teoriju. M. Nauka .1970. 670s.
[23] M.O. Otelbaev. Ocenki spektra operatora Shturma-Liuvillja. Alma-ata. Fylym 1990g. S187.

УДК 517.9

О сильной разрешимости задачи Коши-Дирихле уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом

Оразов И.О., Сапрыгина М.Б., Шалданбаев А.Ш.
Южно-казахстанский государственный университет им.М.Ауезова,г.Шымкент

Ключевые слова: уравнение теплопроводности,собственные функций,присоединенные функций,отклоняющиеся аргумент.

Аннотация. В настоящей работе,методом разделения переменных и спектральной теории уравнения с отклонящимся аргументом, показана сильная разрешимость задачи Коши-Дирихле уравнения теплопроводности с отклоняющмся аргументом. Отклонение из класса Карлемана.

Авторы:
Оразов И.О – к.ф.-м.н.,профессор кафедры «Информатики» Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент.
Сапрыгина М.Б.– к.ф.-м.н.,старший преподаватель кафедры «Информатики и математики» Южно-Казахстанской государственной фармацептической академии,г. Шымкент.
Шалданбаев Амир Шалданбаевич – д.ф.-м.н.,профессор кафедры «Математические методы и моделирование» Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент.