С. А. АТАНБАЕВ, П. А. КОЖАБЕКОВА

РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ И ГРАДИЕНТОВ ТЕМПЕРАТУРЫ

В результате периодического воздействия солнечного излучения на поверхность Земли (для определенности будем считать что это песчаный грунт) на ней формируется температурная волна, которая по мере распространения в глубинные слои затухает. Интенсивность процесса затухания температурных волн определяется коэффициентом температуропроводности грунта a. Суточные колебания температур мы можем наблюдать в различных почвах и грунтах на глубинах, не превосходящих нескольких десятков сантиметров. На более глубинные слои оказывают влияние лишь сезонные колебания температуры. Расчет температурного поля в пределах слоя суточных колебаний температуры может быть осуществлен путем решения первой краевой задачи теплопроводности. Однако для этого необходимо кроме заданной температурной волны на поверхности и температуры на некоторой глубине задать также и начальное распределение температуры по слою.

Температурное поле слоя песчаного грунта функция $T(x,t)$ является решением уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

где $a = \dfrac{\lambda}{c\rho}$ – температуропроводность почвы, м^2/с; λ – теплопроводность, Вт/(м К); c – удельная массовая теплоемкость, Дж/(кг К); ρ – плотность, кг/м^3; t – время, с; x – глубина, м.

На поверхности грунта при $x = 0$ ставится условие:

$$T(0,t) = A\cos(\varpi t), \qquad (2)$$

где A – амплитуда температурных колебаний на поверхности; ω – угловая скорость вращения Земли.

Пусть нам известны экспериментальные зависимости температуры от времени на двух уровнях термометрирования: $\hat{T}_1(t)$ и $\hat{T}_2(t)$ – температуры, измеренные на глубинах $x = l$ и $x = L$ соответственно.

В достаточно тонком приповерхностном слое коэффициент температуропроводности a может быть принят постоянным. Для определения температуропроводности a воспользуемся методом температурных волн. Температурное поле определяется путем решения задачи теплопроводности без начальных данных.

Задача (1)-(2) имеет аналитическое решение:

$$T(x,t) = Ae^{-\sqrt{\frac{\varpi}{2a}}x}\cos\left(\sqrt{\frac{\varpi}{2a}}x - \varpi t\right). \qquad (3)$$

Используя аналитическое решение (3) нетрудно получить формулу для определения температуропроводности почвенного слоя:

$$a = \frac{\varpi(x_2 - x_1)^2}{2\left(\ln\left(\frac{A(x_1)}{A(x_2)}\right)\right)^2}, \qquad (4)$$

где $A(x_1)$, $A(x_2)$ – соответственно амплитуды температурных колебаний на первом ($x = l$) и втором ($x = L$) уровнях термометрирования, полученные из экспериментальных данных.

Таким образом, алгоритм вычисления коэффициента температуро-проводности сводится к выполнению следующей последовательности действий:

- задать первую ($x = l$) и вторую ($x = L$) точки термометрирования;
- ввести измеренные температуры $\hat{T}_1(t)$ и $\hat{T}_2(t)$;
- вычислить амплитуды колебаний температуры на первом и втором уровнях термометрирования $A(x_1)$, $A(x_2)$;
- вычислить температуропроводность a по формуле (4).

Рассмотрим теплоперенос в многослойной системе, составленной из термически толстых слоев и термически тонких прослоек. В термически тонкие слои встроены измерители температуры, с помощью которых измерена температура поверхности $x = 0$, $T_0(t)$, температура поверхности $x = l$ $T_1(t)$ и температура поверхности $x = L$ $T_2(t)$. Для того, чтобы подготовить информацию для решения граничной ОЗТ, представленной в форме задачи Коши, необходимо по результатам измерения температуры на первом и втором уровне термометрирования $T_1(t)$ и $T_2(t)$ вычислить тепловой поток на поверхности $x = l$. Математическая формулировка задачи расчета температурного поля в многослойном грунте имеет вид:

$$c_1\rho_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}\right), 0 < x < l, t > 0, \qquad (5)$$

$$c_2\rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}\right), l < x < L, t > 0, \qquad (6)$$

$$T\big|_{x=0} = \hat{T}_0(t), x = 0, t > 0, \qquad (7)$$

$$T\big|_{x=l} = \hat{T}_1(t), x = l, t > 0, \qquad (8)$$

$$T\big|_{x=l} = \hat{T}_2(t), x = L, t > 0, \qquad (9)$$

$$T_1 = T_0, 0 \le x \le l; T_2 = T_0, l < x \le L, t = 0, \qquad (10)$$

где c_i – удельная массовая теплоемкость; ρ_i – плотность; T_i – температура; λ_i – теплопроводность; l_i – толщина первого (i=1) и второго (i=2) слоев ($l_1 = l, l_1 + l_2 = L$); δ – толщина термически тонких слоев; T_0 – начальная температура системы.

Первым этапом решения поставленной задачи является расчет температурного поля $T(x,t)$, вторым – определение теплового потока на поверхности $x = l$.

Воспользовавшись записью производных в уравнениях (5)-(6) в виде отношений конечных разностей, запишем явную схему решения поставленной задачи:

$$c_1\rho_1 \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} = \lambda_1 \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_1^2},$$

$$0 < i < N; k = 0,1,2,..., \qquad (11)$$

$$c_2\rho_2 \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} = \lambda_2 \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_2^2},$$

$$N < i < M; k = 0,1,2,..., \qquad (12)$$

$$u_0^{k+1} = \hat{T}_0^{k+1}, i = 0; k = 0,1,2,..., \qquad (13)$$

$$u_N^{k+1} = \hat{T}_1^{k+1}, i = N; k = 0,1,2,..., \qquad (14)$$

$$u_M^{k+1} = \hat{T}_2^{k+1}; k = 0,1,2,..., \qquad (15)$$

$$u_i^0 = T_0, 0 \le i \le M, k = 0, \qquad (16)$$

$$N = \left[\frac{l}{h_1}\right], \; M = N + \left[\frac{L-l}{h_2}\right];$$

где N, M – номера узлов; h_1, h_2 – шаги сетки по пространству; τ – шаг сетки по времени.

Разрешая уравнения (11)-(12) относительно значений искомой сеточной функции u_i^{k+1}, получим:

$$u_i^{k+1} = (1 - 2\chi_{1,i})u_i^k + \chi_{1,i}(u_{i+1}^k + u_{i-1}^k), \chi_{1,i} = \frac{\tau\lambda_1}{c_1\rho_1 h_1^2},$$

$$0 < i < N; k = 0,1,..., \qquad (17)$$

$$u_i^{k+1} = (1 - 2\chi_{2,i})u_i^k + \chi_{2,i}(u_{i+1}^k + u_{i-1}^k), \chi_{2,i} = \frac{\tau\lambda_2}{c_2\rho_2 h_2^2},$$

$$N < i < M; k = 0,1,... \qquad (18)$$

Уравнения (13)-(18) представляют собой расчетные формулы для вычисления температурного поля. Заметим, что расчет температурного поля почвенного слоя может быть осуществлен также с использованием неявной конечно-разностной

сетки, в частности, схемы повышенной точности, рассмотренной выше. В этом случае отпадает необходимость контроля выполнения условия устойчивости, накладываемого в случае применения явной схемы на соотношение шагов сетки.

После предварительного сглаживания измеренных температур (глава 2) вычисление теплового потока, проходящего через поверхность $x=l$, осуществляется с помощью формулы:

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}. \qquad (19)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Султангазин У.М.* Создание космического мониторинга и информационной базы данных для решения сельскохозяйственных и экологических задач // Математический журнал. 2001. Т. 1, № 1. С. 77-83.

2. *Атанбаев С.А.* Метод квазиобращения и его приложение. Алматы: Университет "Кайнар", 1999. 208 с.

3. *Алифанов О.М.* Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988. 280 с.

4. *Айзенштат Б.А., Зуев Н.В.* Некоторые черты теплового баланса песчаной пустыни / Под ред. Б. А. Бугаева. Тр. Ташкентской геофизической обсерватории. 1951.

Резюме

Жер қыртысы мен топырақтағы жылу процестерін модельдеу және идентификациялау есептерін шешу, эволюциялық теңдеулерді шешу үшін Коши мәселелері түрінде келтірілген. Коэффициенттерді қалпына келтіру үшін температуралық толқындар әдісінің алгоритмі қолданылады. Температуралық беттегі жылу ағынын идентификациялау үшін термиялық жұқа қабат әдісі қолданылған.

Summary

For evolution equations, the decisions of the tasks of modeling and identifications of the heat processes in ground and in soils introduced in the form of the problem Koshi. For recovering ratio is used the algorithm method of the warm-up waves. For identification the heat of flow on surfaces thermometry is used the method of termal fine layer.

УДК 528.36

Казахский национальный университет им. Аль-Фараби;
ЮКГУ им. М. Ауезова

Поступила 5.04.08г.