М. К. ДАУЫЛБАЕВ, К. Ж. ТЛЕУБЕРДИН

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ С НАЧАЛЬНЫМИ СКАЧКАМИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим на отрезке $a \le t \le 1$ линейное интегро-дифференциальное уравнение:

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon\, y^{(n)} + A_1(t) y^{(n-1)} + \ldots + A_n(t) y =$$

$$= F(t) + \int_a^1 [H_0(t,x) y(x,\varepsilon) + H_1(t,x) y'(x,\varepsilon) + \quad (1)$$

$$+ \ldots + H_{n-1}(t,x) y^{(n-1)}(x,\varepsilon)] dx.$$

с начальными условиями:

$$y(1,\varepsilon) = \alpha_0, \qquad (2)$$

$$y'(1,\varepsilon) = \alpha_1, \ldots, \quad y^{(n-1)}(1,\varepsilon) = \alpha_{n-1},$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $\alpha_i, i = \overline{0, n-1}$ – известные постоянные, $0 < a < 1$.

В работе [1] исследовано асимптотическое поведение решений линейной сингулярно возмущенной интегро-дифференциальной задачи (1), (2) при $\varepsilon \to 0$. Доказаны теоремы существования, единственности и об оценках решения. Показано, что решение рассматриваемой интегро-дифференциальной задачи в точке $t = a$ обладает явлением начального скачка (n–2)-го порядка. В настоящей работе дается алгоритм построения

асимптотического приближения к решению $y(t,\varepsilon)$ задачи (1), (2) с любой степенью точности по малому параметру.

Предполагаются, что выполнены следующие условия:

I. Функции $A_i(t), F(t), i=\overline{1,n}$ на $a \le t \le 1$, а $H_j(t,x), j=\overline{0,n-1}$ в области $D=(a \le t \le 1, a \le x \le 1)$ являются достаточно гладкими и $H_{n-1}(t,a) \ne 0, \forall\, a \le t \le 1$.

II. Функция $A_1(t)$ удовлетворяет неравенству: $A_1(t) \ge \gamma = const > 0, \quad a \le t \le 1$.

III. Число $\lambda = 1$ не является собственным значением ядра:

$$K(t,s) = \frac{1}{A_1(s)} \int_s^1 [H_0(t,x)K_{n-2}(x,s) + \\ + \ldots + H_{n-1}(t,x)K_{n-2}^{(n-1)}(x,s)]dx,$$

где $K_{n-2}(t,s)$ - функция Коши, т.е. решение задачи:

$$L_0 K_{n-2}(t,s) = 0, \quad K_{n-2}^{(j)}(s,s) = \begin{cases} 1, & j = n-2, \\ 0, & j \ne n-2. \end{cases}$$

IV.

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_0(1) & \ldots & u_m(1) & u_{m+1}(1) & \ldots & u_{n-1}(1) \\ u_0'(1) & \ldots & u_m'(1) & u_{m+1}'(1) & \ldots & u_{n-1}'(1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_0^{(n-1)}(1) & \ldots & u_m^{(n-1)}(1) & u_{m+1}^{(n-1)}(1) & \ldots & u_{n-1}^{(n-1)}(1) \end{vmatrix} \ne 0$$

где $u_i(t), i=\overline{0,n-1}$ выражаются через коэффициенты (1).

Так как решение интегро-дифференциальной задачи (1), (2) обладает явлением начального скачка (n–2)-го порядка (см. [1]), то формальное асимптотическое решение задачи (1), (2) ищем в виде:

$$y(t,\varepsilon) = y_\varepsilon(t) + \varepsilon^{n-2} w_\varepsilon(\tau), \quad \tau = (t-a)/\varepsilon, \quad (3)$$

где $y_\varepsilon(t)$ и $w_\varepsilon(\tau)$ представляются в виде:

$$y_\varepsilon(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \ldots, \\ w_\varepsilon(\tau) = w_0(\tau) + \varepsilon w_1(\tau) + \ldots, \quad (4)$$

и $w_k(\tau)$ - отличные от нуля при $t=a$ и экспоненциально убывающие при $t>a$ пограничные функции. Подставляя (3), (4) в (1), (2), получим последовательность задач для определения $y_k(t), w_k(\tau)$.

Коэффициенты $y_k(t), k=0,1,\ldots$ определяются из линейных интегро-дифференциальных задач:

$$\begin{cases} L_0 y_0 \equiv A_1(t) y_0^{(n-1)}(t) + \\ + A_2(t) y_0^{(n-2)}(t) + \ldots + A_n(t) y_0(t) = \\ = F(t) + \int_a^1 [H_0(t,x) y_0(x) + \ldots +, \\ + H_{n-1}(t,x) y_0^{(n-1)}(x)]dx + \Delta(t), \\ y_0^{(i)}(1) = \alpha_i, \quad i = \overline{0,n-1} \end{cases} \quad (5_0)$$

$$\begin{cases} L_0 y_k \equiv A_1(t) y_k^{(n-1)}(t) + \\ + A_2(t) y_k^{(n-2)}(t) + \ldots + A_n(t) y_k(t) = F_k(t) + \\ + \int_a^1 [H_0(t,x) y_k(x) + \ldots + \\ + H_{n-1}(t,x) y_k^{(n-1)}(x)]dx + \dfrac{H_{n-1}(t,a)}{A_1(a)} \cdot \overset{(n-1)}{w_k}(0) \\ y_k^{(i)}(1) = 0, \quad i = \overline{0,n-1}, \quad k = 1,2,\ldots. \end{cases} \quad (5_k)$$

где $\Delta(t)$ - так называемый начальный скачок интегрального члена, выражаемый формулой:

$$\Delta(t) = \frac{H_{n-1}(t,a)}{A_1(a)} \cdot \overset{(n-1)}{w_0}(0), \quad (6)$$

$$F_k(t) = \int_0^\infty \Bigg(\sum_{i=1}^{k} \frac{s^i}{i!} H_{n-1}^{(i)}(t,a) \overset{(n-1)}{w_{k-i}}(s) + \\ + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{s^i}{i!} H_{n-2}^{(i)}(t,a) \overset{(n-2)}{w_{k-1-i}}(s) + \ldots + \\ + \sum_{i=0}^{k-(n-1)} \frac{s^i}{i!} H_0^{(i)}(t,a) w_{k-(n-1)-i}(s) \Bigg) ds - y_{k-1}^{(n)}(t)$$

Для определения $w_0(\tau)$ имеем однородное, а для $w_k(\tau)$ - неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\overset{(n)}{w_0}(\tau)+A_1(a)\overset{(n-1)}{w_0}(\tau)=0, \qquad (7_0)$$

$$\overset{(n)}{w_k}(\tau)+A_1(a)\overset{(n-1)}{w_k}(\tau)=\Phi_k(\tau),$$

$$k=1,2,..., \qquad (7_k)$$

где

$$\Phi_k(\tau)=-\sum_{i=1}^{k}\frac{\tau^i}{i!}A_1^{(i)}(a)\overset{(n-1)}{w_{k-i}}(\tau)-$$

$$+\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\tau^i}{i!}A_2^{(i)}(a)\overset{(n-2)}{w_{k-1-i}}(\tau)-...- \qquad (8)$$

$$-\sum_{i=0}^{k-(n-1)}\frac{\tau^i}{i!}A_n^{(i)}(a)w_{k-(n-1)-i}(\tau).$$

Из (7_0) имеем $\overset{(n-1)}{w_0}(\tau)=\overset{(n-1)}{w_0}(0)\cdot e^{-A_1(a)\tau}$.

Тогда $\overset{(n-1)}{w_0}(\tau)\to 0,\ \tau\to\infty$ при любых $\overset{(n-1)}{w_0}(0)\neq 0$, т.е. функция $\overset{(n-1)}{w_0}(\tau)$ является функцией пограничного слоя. Интегрируя (7_0) от 0 до ∞ и требуя $\overset{(i)}{w_0}(\tau)\to 0,\quad \tau\to\infty,\quad i=\overline{0,n-2}$, получаем:

$$\overset{(i)}{w_0}(0)=\frac{(-1)^{n-1-i}}{A_1^{n-1-i}(a)}\overset{(n-1)}{w_0}(0),$$

$$i=\overline{0,n-1}. \qquad (9_0)$$

В противном случае $\overset{(i)}{w_0}(\tau)\not\to 0$, $\tau\to\infty, i=\overline{0,n-1}$. Обратимся к уравнению (7_k), где $\Phi_k(\tau)$ – известная функция, зависящая от $w_i(\tau), i<k$ (см. (8)). Так как $w_i(\tau)\to 0, \tau\to\infty, i<k$, то из (7_k) следует, что $\overset{(n-1)}{w_k}(\tau)\to 0,\quad \tau\to\infty$ при произвольных $\overset{(n-1)}{w_k}(0)\neq 0$. Интегрируя теперь уравнение (7_k) от 0 до ∞, и требуя $\overset{(i)}{w_k}(\infty)=0, i=\overline{0,n-2}$, имеем:

$$\overset{(i)}{w_k}(0)=\frac{(-1)^{n-1-i}}{A_1^{n-1-i}(a)}\times$$

$$\times\left[\overset{(n-1)}{w_k}(0)+\int_0^\infty\sum_{j=0}^{n-2-i}\frac{\tau^j}{j!}A_1^j(a)\Phi_k(\tau)d\tau\right]. \qquad (9_k)$$

$$i=\overline{0,n-1}$$

Итак, главный член $w_0(\tau)$ погранслойной части (3) определяется из уравнения (7_0) с начальными условиями (9_0), где значение $\overset{(n-1)}{w_0}(0)$ доставляется из задачи (5_0). Аналогично, для определения коэффициентов $w_k(\tau), k\geq 1$ разложения (4) решаем уравнение (7_k) при начальных условиях (9_k), где $\overset{(n-1)}{w_k}(0)$ определяется из задачи (5_k). Тем самым, нулевые и k-ые приближения разложений (3), (4) определены полностью.

Задача (5_0) называется *измененной вырожденной задачей* для задачи (1), (2). Она отличается от обычной вырожденной задачи наличием слагаемой $\Delta(t)$ (см. (6)), называемой начальным скачком интегрального члена.

Образуем N-ую частичную сумму разложений (3), (4):

$$\bar{y}_N(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k y_k(t)+\varepsilon^{n-2}\sum_{k=0}^{N+1}\varepsilon^k w_k(\tau),$$

$$\tau=\frac{t-a}{\varepsilon}, \qquad (10)$$

где $N\geq 0$ - целое число, коэффициенты $y_k(t), k=\overline{0,N}$ определяются из задач (5_0) и (5_k) и они вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка ограничены на отрезке $[a,1]$. Коэффициенты $w_k(\tau), k=\overline{0,N+1}$ определяются из задач (7_0), (9_0) и (7_k), (9_k) и они вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка являются функциями пограничного слоя при $\tau\geq 0$.

Теорема. *Пусть функции $A_i(t), F(t), i=\overline{1,n}$ на отрезке $[a,1]$, а $H_j(t,x)$, $j=\overline{0,n-1}$ в области D – непрерывны вместе со своими производными до (N+2)-го порядка включительно и выполнены условия II-IV. Тогда при достаточно малых*

значениях ε решение $y(t,\varepsilon)$ задачи (1), (2) на отрезке $[a,1]$ существует, единственно и представимо в виде $y(t,\varepsilon)=\bar{y}_N(t,\varepsilon)+R_N(t,\varepsilon)$, где $\bar{y}_N(t,\varepsilon)$ выражается формулой (10), а для остаточного члена $R_N(t,\varepsilon)$ справедливы оценки $\left|R_N^{(i)}(t,\varepsilon)\right|\le K\varepsilon^{N+1}$, $i=\overline{0,n-1}$, $a\le t\le 1$, где $K>0$ – некоторая постоянная, не зависящая от ε.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дауылбаев М.К., Тлеубердин К.Ж.* Асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенных линейных интегро-дифференциальных уравнений // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. 2007. № 1. С. 35-39.

Резюме

Бастапқы шарттары қарастырылып отырған кесіндінің оң жақ шетінде берілген сингулярлы ауытқыған сызықты интегралды дифференциалдық теңдеулердің кіші параметр бойынша кез-келген дәлдікпен асимптотикалық жіктелуі құрылған. Шешімнің бар болуы, жалғыздығы және қалдық мүшесінің бағалауы туралы теорема дәлелденген.

Summary

In work the asymptotic expansion of solutions of singular perturbed linear integro-differential equations is constructed with the initial conditions in the right point of a considered section with any degree of an exactitude on a small parameter. The theorem of existence,uniqueness of a solution and of estimation of the residual member is proved.

КазНУ им. ал-Фараби *Поступила 10.11.08г.*