

Б. Т. ЖУМАГУЛОВ, Ш. Н. КУТТЫКОЖАЕВА, Н. А. ИСАБЕКОВА

СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ ОКЕАНА

Исследуется сходимость разностных схем для нелинейной модели океана. Дано обоснование сходимости итерационного метода по физическим факторам.

1. Сходимость разностных схем для нелинейной модели океана.

Рассмотрим краевую задачу нелинейной модели океана в области Ω :

$$(\bar{v}\nabla)v = \mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} + \mu\Delta v - \hat{V}P - l \times v + f, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \bar{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_3} = -\rho g, \quad v = (v_1, v_2), \quad \bar{v} = (v_1, v_2, v_3), \quad (3)$$

$$v|_S = 0, \quad v_3|_{x_3=0} = v_3|_{x_3=1} = 0. \quad (4)$$

Здесь для простоты предположим, что Ω – куб. Для построения разностных схем слагаемые переноса перепишем в виде [1]

$$M(\bar{v}, v) = (\bar{v}\nabla)v = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 (v_\alpha \frac{\partial v}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (v_\alpha v)). \quad (5)$$

Аппроксимируем (1)–(4) в области Ω_h

$$M(\bar{u}, u) = \mu_0 u_{x_3 \bar{x}_3} + \mu \Delta_h u - \hat{V}_h Q - l \times u + f_h, \quad (6)$$

$$\operatorname{div}_h \bar{u} = \sum_{j=1}^3 u_{j \bar{x}_j} = 0, \quad (7)$$

$$Q_{x_3} = -\rho g. \quad (8)$$

$M(\bar{u}, u)$ – равно любой из трех выражений

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 [u_\alpha u_{\bar{x}_\alpha} + (u_\alpha u)_{x_\alpha}] + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 [u_\alpha u_{x_\alpha} + \\ & + (u_\alpha u)_{\bar{x}_\alpha}] + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 [u_\alpha u_{x_\alpha} + (u_\alpha u)_{x_\alpha}] \end{aligned}$$

где $u_0 = \frac{u_{x_\alpha} + u_{\bar{x}_\alpha}}{2}$. Здесь легко заметим,

что справедливо равенство

$$(M(\bar{v}, v), v) = 0. \quad (9)$$

Схемы (6)–(8) решаются с граничными условиями

$$u|_{S_h} = 0, \quad u_3|_{x_3=0} = u_3|_{x_3=1} = 0. \quad (10)$$

Лемма 1. Если $\|f_h\|_{(-1)} \leq C < \infty$, то разностная схема (6)–(8), (10) имеет хотя бы одно решение и для решения имеет место оценка

$$\|u\|_1 \leq C (\|f_h\|_{(-1)} + \|\rho g\|) \quad (11)$$

Доказательство. Умножим (6) на v , (8) на v_3 , и суммируем по сеткам Ω_h , используя (7), (9), получим

$$\|u\|_1^2 = (\rho g, u_3) + (f_h, v). \quad (12)$$

Правую часть (12) оцениваем по неравенству Гельдера

$$|(\rho g, u_3)| \leq \|\rho g\| \|v\|_1, \quad |(f_h, u)| \leq \|f_h\|_{(-1)} \|u\|_1.$$

Отсюда легко получить оценку (11). Из теоремы Брауэра следует существование хотя бы одного решения задачи (6)–(8), (10). Лемма 1 доказана.

Теорема 1. Пусть решение задачи (1)–(4) достаточно гладкое и $\|f_h\|$ – достаточно мало. Тогда решения задачи (6)–(8), (10) сходятся к решению задачи (1)–(4) и имеет место оценка

$$\|u - v\|^2 \leq Ch.$$

В силу (6)–(8), (10) для $\omega = u - v$, $\pi = Q - P$, $\bar{\omega} = \bar{u} - \bar{v}$ получим уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 [u_\alpha \omega_{\bar{x}_\alpha} + (u_\alpha \omega)_{x_\alpha}] + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 [(\omega_\alpha v_{\bar{x}_\alpha} + (\omega_\alpha v)_{x_\alpha})] = \\ & = \mu_0 \omega_{x_3 \bar{x}_3} + \mu \Delta_h \omega - l \times \omega - \hat{V} \pi + r_h, \quad (13) \end{aligned}$$

$$\sum_{\alpha=1}^3 \omega_{\alpha\bar{\alpha}} = r_{0h}, \quad \pi_{x_3} = r_{3h}, \quad \bar{r}_h = (r_{1h}, r_{2h}, r_{3h}), \quad (14)$$

$$\omega|_{S_h} = 0, \quad \omega_3|_{x_3=0} = \omega_3|_{x_3=1} = 0, \quad (15)$$

где $r_{1h}, r_{2h}, r_{3h}, r_{0h}$ – невязка $0(h)$.

Умножим (13) на ω , суммируем по области Ω_h учитывая тождество

$$\sum_{\alpha=1}^3 \left((u_{\alpha} \omega_{\bar{x}_{\alpha}} + (u_{\alpha} \omega)_{x_{\alpha}}) \omega_{\alpha} \right) = 0, \text{ имеем}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \left(\omega_{\alpha} v_{\bar{x}_{\alpha}} + (u_{\alpha} \omega)_{x_{\alpha}}, \omega \right) + \mu \|\omega\|_1^2 =$$

$$= (\pi, r_{0h}) + (\bar{r}_h, \omega). \quad (16)$$

Оцениваем левые части (16)

$$\left| \sum_{\alpha=1}^3 (\omega_{\alpha} v_{\bar{x}_{\alpha}}, \omega) \right| \leq C \|v_{\bar{x}_{\alpha}}\|_{L_4(\Omega_h)} \|\omega\|_1 \|\omega\|_{L_4(\Omega_h)} \leq$$

$$\leq C \|v_{\bar{x}_{\alpha}}\|_{L_4(\Omega_h)} \|\omega\|_1^2, \quad (17)$$

$$\left| ((\omega_{\alpha}, v)_{x_{\alpha}}, \omega) \right| \leq C \|v_{\bar{x}_{\alpha}}\|_{L_4(\Omega_h)} \|\omega\|_1^2.$$

Из (13) и (14) оцениваем $\nabla_h \pi$ в негативной норме, учитывая неравенство (24)

$$\aleph^0 \|\pi\| \leq C \left(\sup_{\|\varphi\|_1=1} \sum_{\alpha=1}^3 \left[(u_{\alpha} \omega_{\bar{x}_{\alpha}} + (u_{\alpha} \omega)_{x_{\alpha}} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \omega_{\alpha} v_{\bar{x}_{\alpha}} + (\omega_{\alpha} v)_{x_{\alpha}}, \varphi \right] \right) + \|\omega\|_1. \quad (18)$$

Оцениваем правую часть (18)

$$\sup_{\|\varphi\|_1=1} \left(\sum_{\alpha=1}^3 (u_{\alpha} \omega_{\bar{x}_{\alpha}}, \varphi) \right) = \sup_{\|\varphi\|_1=1} \left(\sum_{\alpha=1}^3 (u_{\alpha} \omega, \varphi_{\bar{x}_{\alpha}}) \right) \leq$$

$$\leq C_2 \left\| \sum u_{\alpha} \right\|_{L_4(\Omega_h)} \|\omega\|_{L_4(\Omega_h)} = J_0.$$

Теперь используем известную оценку теоремы вложения [2], имеем

$$\left\| \sum_{\alpha=1}^3 u_{\alpha} \right\|_{L_4(\Omega_h)} \leq \frac{C_3}{\sqrt{h}} \|u\|_1.$$

Отсюда J_0 оценивается величиной сверху

$$J_0 = C_4 \frac{1}{\sqrt{h}} \|\omega\|_1 \|u\|_1. \quad (19)$$

Аналогично оцениваются и слагаемые

$$\sup_{\|\varphi\|_1=1} \left(\sum_{\alpha=1}^3 (u_{\alpha}, \omega)_{x_{\alpha}}, \varphi \right) \leq C_5 \frac{1}{\sqrt{h}} \|\omega\|_1 \|u\|_1, \quad (20)$$

$$\sup_{\|\varphi\|_1=1} \left((\omega_{\alpha} v_{\bar{x}_{\alpha}} + (\omega_{\alpha} v)_{x_{\alpha}}), \varphi \right) \leq C_6 \|v\|_{L_4(\Omega_h)} \|\omega\|_1.$$

Используя (19), (20), выводим оценку

$$|(\pi, r_{0h})| \leq C_7 \left(\|\omega\|_1 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{h}} \|u\|_1 + \|v\|_{L_4(\Omega_h)} \right) \|r_{0h}\| \leq \right.$$

$$\leq \delta \|\omega\|_1^2 + \frac{C_{\delta}}{h} \|r_{0h}\|^2. \quad (21)$$

Собирая оценки (16)–(21) предполагая, что $\|v_x\|_{L_4(\Omega_h)}$ – достаточно мало и при малом δ , выводим оценку $\|v - u\|_1^2 \leq Ch$. Теорема 1 полностью доказана.

2. Итерационный метод по физическим факторам.

Для того, чтобы решить схему (6)–(8), (10) итерационным методом, запишем ее в другой эквивалентной форме

$$M_h(\bar{u}, u) = \mu_0 u_{x_3 \bar{x}_3} + \mu \Delta_h u - l \times u - \hat{\nabla}_h \xi + \tilde{f}_h, \quad (22)$$

$$\sum_{k=0}^N \sum_{\alpha=1}^2 u_{\alpha \bar{x}_{\alpha}} h = 0, \quad u_3 = u_{3ijk} = \quad (23)$$

$$= - \sum_{m=0}^k \sum_{\alpha=1}^2 u_{\alpha i j m x_{\alpha}} h, \quad u_{\alpha} = u_{\alpha i j k}, \quad u|_{S_h} = 0,$$

где $\tilde{f}_h = f_h + \hat{\nabla}_h \sum_{l=0}^k \rho g$, $g = const$, $\rho = \rho(x)$.

Схему (22), (23) реализуем следующим итерационным методом по физическим факторам [3]

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} + M(\bar{u}^n, u^{n+1/2}) = \mu_0 u_{x_3 \bar{x}_3}^{n+1/2} +$$

$$+ \mu \Delta_h u^{n+1/2} - l \times u^{n+1/2} - \hat{\nabla}_h \xi^n + \tilde{f}_h, \quad (24)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} - \hat{\nabla}_h(\xi^{n+1} - \xi^n) = 0, \quad (25)$$

$$\sum_{k=0}^N \sum_{\alpha=1}^2 u_{\alpha \bar{x}_\alpha}^{n+1} h = \sum_{k=0}^N \operatorname{div}_h u^{n+1} h = 0, \quad (26)$$

$$u^{n+1/2} \Big|_{S_h} = u^n \Big|_{S_h} = u^{n+1} \Big|_{S_h} = 0, \quad u^0 = u_0, \quad x \in \bar{\Omega}_h,$$

где $M(,)$ - равно любой из трех выражений

$$M(\bar{u}^n, u^{n+1/2}) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sum_{\alpha=1}^3 \left(u_{\alpha x_\alpha}^n u_{x_\alpha}^{n+1/2} + (u_{\alpha x_\alpha}^n u^{n+1/2})_{x_\alpha} \right) \right],$$

$$M(\bar{u}^n, u^{n+1/2}) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sum_{\alpha=1}^3 \left(u_{\alpha \bar{x}_\alpha}^n u_{\bar{x}_\alpha}^{n+1/2} + (u_{\alpha \bar{x}_\alpha}^n u^{n+1/2})_{\bar{x}_\alpha} \right) \right],$$

$$M(\bar{u}^n, u^{n+1/2}) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sum_{\alpha=1}^3 \left(u_{\alpha x_\alpha}^n u_{x_\alpha}^{n+1/2} + (u_{\alpha x_\alpha}^n u^{n+1/2})_{x_\alpha} \right) \right].$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия

$$0 < \beta < \frac{1}{C_5},$$

$$1 - \tau\beta \left[\left(\frac{1}{h^3} + \frac{1}{h^{9/2}} \right) C_8 \left(\tau \|\tilde{f}\|^2 + \|\tilde{f}\|_{(-1)}^2 \right) C_5 \right] \geq \frac{1}{2}.$$

Тогда справедлива оценка

$$\|u^{n+1}\|^2 + \tau^2 \|\hat{\nabla}_h \xi^{n+1}\|^2 \leq C_9 \left(\tau \|\tilde{f}\|^2 + \|\tilde{f}\|_{(-1)}^2 \right),$$

где C_i - различные положительные постоянные, зависящие от данных задачи (24)-(26).

Доказательство. Умножим (24) на $2\pi u^{n+1/2} h^3$, и суммируем по точкам Ω_h , и учитывая тождество $(M(\bar{u}^n, u^{n+1/2})) = 0$, в результате имеем

$$\begin{aligned} & \|u^{n+1/2}\|^2 - \|u^n\|^2 + 2\tau \|u^{n+1/2}\|_1^2 = \\ & = \left[(\xi^n, \operatorname{div}_h u^{n+1/2}) + (\tilde{f}_h, u^{n+1/2}) \right] 2\tau. \quad (27) \end{aligned}$$

Далее умножим (25) на $\tau \hat{\nabla}_h(\xi^{n+1} + \xi^n)$, суммируя по сеткам Ω_h , получим

$$\begin{aligned} & \tau^2 \left(\|\hat{\nabla}_h \xi^{n+1}\|^2 - \|\hat{\nabla}_h \xi^n\|^2 \right) + \tau \left(\operatorname{div}_h u^{n+1/2}, \xi^n \right) + \\ & + \tau \left(\operatorname{div}_h u^{n+1/2}, \xi^{n+1} \right) = 0. \quad (28) \end{aligned}$$

Умножим (5) на $2\tau u^{n+1}$ и $\tau(u^{n+1} + u^{n+1/2})$ с учетом равенства (26) имеем:

$$\|u^{n+1}\|^2 - \|u^{n+1/2}\|^2 + \|u^{n+1} - u^{n+1/2}\|^2 = 0, \quad (29)$$

$$\|u^{n+1}\|^2 - \|u^{n+1/2}\|^2 - \tau(\xi^{n+1} - \xi^n, \operatorname{div}_h u^{n+1/2}) = 0. \quad (29')$$

Отсюда из (27)-(29) выводим

$$\begin{aligned} & \|u^{n+1}\|^2 - \|u^n\|^2 + \|u^n - u^{n+1/2}\|^2 + \|u^{n+1/2} - u^{n+1}\|^2 + \\ & + \tau \|u^{n+1/2}\|_1^2 + \tau^2 \left(\|\hat{\nabla}_h \xi^{n+1}\|^2 - \|\hat{\nabla}_h \xi^n\|^2 \right) \leq \|\tilde{f}_h\|_{(-1)}^2 \tau. \quad (30) \end{aligned}$$

В силу (24) оценим $\hat{\nabla}_h \xi^n$ в $L_2(\Omega_h)$

$$\begin{aligned} & \tau \|\hat{\nabla}_h \xi^n\| \leq \|u^{n+1/2} - u^n\| + \tau \|M(\bar{u}^n, u^{n+1/2})\| + \\ & + \frac{\tau C_0}{h} \|u^{n+1/2}\|_1 + \tau \|\tilde{f}_h\| + \tau l \|u^{n+1/2}\|, \quad (31) \end{aligned}$$

Используя теорему вложения [2], оцениваем второе слагаемое (29)

$$\begin{aligned} & \|u^n u_{x_\alpha}^{n+1/2}\|_{L_2(\Omega_h)}^2 \leq \|u^n\|_{L_4(\Omega_h)}^2 \|u_{x_\alpha}^{n+1/2}\|_{L_4(\Omega_h)}^2 \leq \\ & \leq C_1 \|u^n\|^{1/2} \|u_x^n\|^{3/2} \|u^{n+1/2}\|_1^{1/2} + \\ & + \|\mu u_{x_3 \bar{x}_3}^{n+1/2} + \mu_0 \Delta_h u^{n+1/2}\|^{3/2} \leq \frac{C_2 \|u^n\|^2 \|u^{n+1/2}\|_1^2}{h^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{k=1}^N \operatorname{div}_h u^n u_{x_3}^{n+1/2} \right\|^2 \leq \\ & \leq \|u^{n+1/2}\|_{L_4(\Omega_h)}^2 \left\| \sum_{k=1}^N \operatorname{div}_h u^n h \right\|_{L_4(\Omega_h)}^2 \leq \\ & \leq C_3 \frac{1}{h^{3/2}} \|u^{n+1/2}\|_1 \frac{1}{h} \|u^n\|_1^2 \leq \\ & \leq C_4 \frac{1}{h^{9/2}} \|u^n\|^2 \|u^{n+1/2}\|_1. \quad (32) \end{aligned}$$

При этом использовали неравенство

$$\max_{\Omega_h} |u^n| \leq C \|u\|^{1/4} \left\| \mu_0 u_{x_3 \bar{x}_3}^n + \mu \Delta_h u^n \right\|^{3/4},$$

если $\Omega \in R^2$.

Отсюда из (31), (32) имеем

$$\begin{aligned} \tau^2 \left\| \hat{\nabla}_h \xi^n \right\|^2 &\leq 5 \left(\|u^{n+1/2} - u^n\|^2 + \tau^2 \left\| M_h^1 u^{n+1/2} \right\|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tau^2 C_0}{h^2} \|u^{n+1/2}\|_1^2 + \tau^2 l^2 \|u^{n+1/2}\| + \tau \|f_h\| \right) \leq \\ &\leq C_5 \left(\|u^{n+1/2} - u^n\|^2 + \tau^2 \left(\frac{1}{h^3} \|u^n\|^2 + \frac{1}{h^{9/2}} \|u^n\|^2 \right) \right. \\ &\quad \left. \|u^{n+1/2}\|_1^2 + \tau^2 \|\tilde{f}_h\|^2 \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Умножим (33) на β , предполагая $0 < \beta < \frac{1}{C_5}$

и будем требовать, чтобы выполнялись неравенства

$$1 - C_5 \beta \geq \beta_0 > 0, \quad 1 - \tau \beta \left(\frac{1}{h^3} + \frac{1}{h^{9/2}} \right) \|u^n\|^2 C_5 \geq \frac{1}{2}, \quad (34)$$

и сложив с (30), выбрасывая в левой части положительные слагаемые, имеем

$$\begin{aligned} \|u^{n+1}\|^2 - \|u^n\|^2 + \frac{1}{2} \tau \|u^{n+1/2}\|_1^2 + \tau^2 \left\| \hat{\nabla}_h \xi^{n+1} \right\|^2 &\leq \\ \leq \tau^2 (1 - \delta) \left\| \hat{\nabla}_h \xi^n \right\|^2 + C_6 \left(\tau^2 \|\tilde{f}_h\|^2 + \tau \|\tilde{f}\|_{(-1)}^2 \right). \end{aligned} \quad (35)$$

С учетом тождества (29), из (35) выводим

$$\left(1 + \frac{1}{2} \tau C_\Omega \right) \|u^{n+1}\|^2 + \tau^2 \left\| \hat{\nabla}_h \xi^{n+1} \right\|^2 \leq \quad (36)$$

$$\leq \tau^2 (1 - \beta) \left\| \hat{\nabla}_h \xi^n \right\|^2 + C_6 \left(\tau^2 \|\tilde{f}_h\|^2 + \tau \|\tilde{f}\|_{(-1)}^2 \right) + \|u^n\|^2.$$

Отсюда из (36) легко получаем оценку

$$\|u^{n+1}\|^2 + \tau^2 \left\| \hat{\nabla}_h \xi^{n+1} \right\|^2 \leq C_7 \left(\tau \|\tilde{f}_h\|^2 + \|\tilde{f}\|_{(-1)}^2 \right),$$

чтобы выполнить условия (34) τ, β должны удовлетворять неравенству

$$1 - \tau \beta \left[\left(\frac{1}{h^3} + \frac{1}{h^{9/2}} \right) C_5 C_7 \left(\tau \|\tilde{f}_h\|^2 + \|\tilde{f}\|_{(-1)}^2 \right) \right] \geq \frac{1}{2}.$$

Легко можно доказать, что если τ, β удовлетворяет последнему неравенству, то условия (34) всегда выполняется. Итак, лемма 2 доказана.

Имеет место следующая теорема:

Теорема 3. Пусть выполнены условия

$$1 - \frac{\tau N_7}{h^{9/2}} \left(\|u_0 - u\|^2 + \|u\|^2 \right) \beta - N_8 \left(\|u\|_1^2 + \|u_x\|_{L_4(\Omega_h)}^2 \right) \geq 0, \quad 1 - 5\beta - \frac{\tau C_0}{h^2} > 0.$$

Тогда итерационный метод (24)-(26) сходится со скоростью геометрической прогрессии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А., Вабичевич П.Н. Аддитивные схемы для задач математической физики. М., 1999. С. 306.
2. Карчевский М.М., Ляшко А.Д. Разностные схемы для нелинейных задач математической физики. Казань: Ротапринт. Изд. Казанского госуниверситета, 1976.
3. Белоцерковский О.М., Гуцин В.А., Щенников В.Б. Метод расщепления и применения к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // ЖВМ и МФ. 1975. Т. 15, №2. С. 177-207.

Резюме

Мұхиттың сызықсыз моделінің айырымдық сұлбаларының жинақтығы зерттелген. Физикалық факторлар бойынша итерациялық әдістің жинақтылығы дәлелденген.

Summary

In work convergence of computing circuits for nonlinear model of ocean is investigated. The substantiation of convergence of an iterative method under physical factors is given.

УДК 517.958

Кокшетауский университет,
КазНУ им. аль-Фараби

Поступила 2.03.08г.