Б. Т. ЖУМАГУЛОВ, Ш. Н. КУТТЫКОЖАЕВА, Н. А. ИСАБЕКОВА

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА В ПЕРЕМЕННЫХ ФУНКЦИИ ТОКА И ВИХРЯ СКОРОСТЕЙ

Рассмотрим уравнения вязкой несжимаемой жидкости в форме Ламба-Громека:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \times rot\vec{v} = \mu \cdot \Delta\vec{v} - \nabla Q + \vec{f}, \quad div\vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\vec{v}\big|_{t=0} = \vec{v}_0(x), \; div\vec{v}_0(x) = 0, \; \vec{v}\big|_S = 0, \quad (2)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, $Q = P + |\vec{v}|^2/2$ - полный напор.

Будем считать, что область $\Omega \subset R^3$ - прямоугольный параллелепипед.

В работах [1], [3] предложены некоторые численные методы решения задач (1)-(2) в переменных «функция тока – вихрь скоростей». В [3] показано эквивалентность двух задач. Рассмотрим задачу (1)-(2) в переменных «функция тока – вихрь скоростей»:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + rot(rot \times \omega) = \mu \cdot \Delta\omega - rotf, \; \Delta\psi = -\omega, \quad (3)$$

со следующими начально-краевыми условиями:

$$\begin{aligned} &\omega\big|_{t=0} = \omega_0(x), \\ &\psi \cdot \tau_1\big|_S = \psi \cdot \tau_2\big|_S = 0, \; (\omega \cdot n)\big|_{x_1=0} = 0 \\ &rot\psi \cdot \tau_1\big|_S = rot\psi \cdot \tau_2\big|_S = 0, \\ &div\psi\big|_S = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Для ясности продемонстрируем граничное условие (4) в случае прямоугольной области. Пусть часть границы области лежит на оси $x_1 = 0$. Тогда начально-краевые условия преобразуются следующим образом:

$$\omega\big|_{t=0} = \omega_0(x),$$

$$\psi_2\big|_{x_1=0} = \psi_3\big|_{x_1=0} = 0, \; \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=0} = 0. \quad (5)$$

$$(\omega \cdot n)\big|_{x_1=0} = \omega_1\big|_{x_1=0} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}\right)\bigg|_{x_1=0} = 0, \; \left(\frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3}\right)\bigg|_{x_1=0} = 0. \quad (6)$$

Лемма. Для решения задачи (3),(5),(6) справедлива следующая априорная оценка:

$$\|\nabla\psi^\varepsilon\|^2_{L_\infty(0,T,l_2(\Omega))} + \|\Delta\psi\|^2_{L_2(0,T,l_2(\Omega))} \le C < \infty, \quad (7)$$

где постоянная C зависит только от начальных данных и правых частей.

Система уравнений (3) не является системой Коши-Ковалевской, поэтому непосредственное применение метода дробных шагов затруднительно. Одним из способов решения рассматриваемой задачи - аппроксимация системы уравнений (3) уравнениями эволюционного типа. Тогда исходная система уравнений с малым параметром имеет вид:

$$\frac{\partial \omega^\varepsilon}{\partial t} + rot(rot\psi^\varepsilon \times \omega^\varepsilon) = \mu \cdot \Delta\omega^\varepsilon - rotf,$$

$$\varepsilon\frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial t} = \Delta\psi^\varepsilon + \omega \quad \textbf{(8)}$$

с начально-краевыми условиями:

$$\omega^\varepsilon\big|_{t=0} = \omega_0(x), \; \psi^\varepsilon\big|_{t=0} = \psi_0(x), \quad (9)$$

$$\psi_2^\varepsilon\big|_{x_1=0} = \psi_3^\varepsilon\big|_{x_1=0} = 0, \; \frac{\partial \psi_1^\varepsilon}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=0} = 0, \; \omega_1^\varepsilon\big|_{x_1=0} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \psi_2^\varepsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1^\varepsilon}{\partial x_2}\right)\bigg|_{x_1=0} = 0, \; \left(\frac{\partial \psi_3^\varepsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1^\varepsilon}{\partial x_3}\right)\bigg|_{x_1=0} = 0.$$

Определение обобщенного решения задач (8), (9) дается аналогично [4].

Справедливы следующие

Теорема 1. $\psi_0(x) \in W_2^2(\Omega)$, $\omega_0(x) \in W_2^1(\Omega)$, $S \in C^2$. Тогда существует хотя бы одно обобщенное решение задачи (8)-(9) и для него имеет место оценки:

$$\varepsilon\|\psi^\varepsilon\|_{L_1(0,T,l_2(\Omega))} + \|\Delta\psi^\varepsilon\|_{L_1(0,T,l_2(\Omega))} +$$

$$+ \|\omega^\varepsilon\|_{L_1(0,T,l_2(\Omega))} \le C < \infty.$$

Теорема 2. Обобщенное решение задачи (8)-(9) сходится к обобщенному решению задачи (3), (5), (6) при $\varepsilon \to 0$ со скоростью

$$\left\|\psi^{\varepsilon} - \psi\right\|^{2}_{L_1(0,T,l_2(\Omega))} + \int_0^T \left\|\omega^{\varepsilon\varepsilon} - \omega\right\|_{L_2(\Omega)} dt \le C\sqrt{\varepsilon}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бессонов О.А., Брайловская В.А., Ру Б.* Численное моделирование трехмерного сдвигового течения в полости с движущимися крышками // Механика жидкости и газа. 1998. №3. С. 41-49.

2. *Weiman E.–Guo Lin.* Finite difference method for 3D visions incompressible flows in the voticity-vector component formulation on non-staggered grids // Journal in computational physocs. 1997. V. 138. Article № 9755815. P. 57-82.

3. *Калтаев А., Смагулов Ш.С., Шлембаев К.Т.* К теории численного решения пространственных задач течения вязкой жидкости в переменных «функция тока – вихрь скоростей» в односвязной области // Труды международной конференции «Современные проблемы механики». Алматы, 2001. С. 77-82.

4. *Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983. 318 с.

Резюме

Ток функциясы мен құйын жылдамдығы айнымалылары арқылы берілген стационар емес сығылмайтын сұйықтықтың кіші параметр бойынша регуляризациясы карастырылған. Жалпылама шешімнің бар болуы мен жинақталуы көрсетілген. Шешімнің бірқалыпты априорлық бағалары мен жинақталу жылдамдық бағасы алынған.

Summary

In the given work approximation with small parameter of non-stationary model of an incompressible liquid in variables of function of a current and a whirlwind of speeds is examined. Existence and convergence of the generalized decision of the approached task is received, and also uniform aprioristic estimations and an estimation of speed of convergence of the decision are removed.

УДК 517.946

Кокшетауский университет,
КазНУ им. аль-Фараби

Поступила 2.03.08г.