*Т. Ш. КАЛЬМЕНОВ, Д. СУРАГАН*

# О ТЭТА-ФУНКЦИИ И ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В классической теории эллиптических функций встречается 4 класса основных тэта-функций. Возьмем для удобства функцию $\theta_3(\upsilon,\nu)$, так как остальные виды тэта-функции находятся аналогично.

**Определение.**

Тэта-функция для комплексного переменного $\upsilon$ и $\nu$ комплексного параметра при $\operatorname{Re}\upsilon > 0$ определяются посредством рядов

$$\theta_3(\upsilon,\nu) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi\nu}\cos(2n\pi\upsilon). \qquad (1)$$

Тэта-функции играют большую роль в разных областей математики, точнее говоря в уравнениях частных производных параболического типа.

Сами по себе тэта-функции достаточно исследованы в работах [1, 6, 7],... и ниже даем ее интегральное представление.

С помощью изображения преобразование Лапласа-Карсона для элементарных функции.[4]

$$e^{-at} \leftrightarrow \frac{p}{p+a}, \quad \operatorname{Re} p > -\operatorname{Re} a, \qquad (2)$$

$$\cos(at) \leftrightarrow \frac{p^2}{p^2+a^2}, \qquad (3)$$

находим, что выражение(1) имеет следующее изображение

$$P_3(\sigma,s) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma}{\sigma+\pi n^2}\cdot\frac{s^2}{s^2+4\pi^2n^2} = \qquad (4)$$

$$= 1 + \frac{2s\sigma^2}{s^2-4\pi\sigma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma+\pi n^2} - \frac{8\pi s^2\sigma}{s^2-4\pi\sigma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{s^2+4\pi^2n^2}$$

где $\sigma, s$ – комплексные переменные.

**Лемма.**

Ряд **(4)** сходится и его сумма равна

$$-\frac{2\pi\sigma s cth\left(\frac{s}{2}\right)-\sqrt{\pi}s^2\sqrt{\sigma}cth\left(\sqrt{\pi}\sqrt{\sigma}\right)}{s^2-4\pi\sigma}. \quad (5)$$

Действительно, если воспользоваться [3].

$$cth(\pi z)=\frac{1}{\pi z}+\frac{2z}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^2+n^2}, \quad (6)$$

то из равенства (4) следует (5).

Если применить обращение преобразование Лапласа-Карсона к (5), то интегральной вид $\theta_3(\upsilon,\nu)$ задается в следующем виде:

$$\theta_3(\upsilon,\nu)=\frac{1}{4\pi^2}\times \quad (7)$$

$$\times\int_{c_-}^{c_+}\int_{c'_-}^{c'_+}\frac{2\pi cth\left(\frac{s}{2}\right)-\sqrt{\pi}s\frac{1}{\sqrt{\sigma}}cth\left(\sqrt{\pi}\sqrt{\sigma}\right)}{s^2-4\pi\sigma}e^{\sigma\upsilon+s\nu}dsd\sigma,$$

где $c_\pm=c\pm i\infty$, $c$ – достаточное большое действительное число.

Рассмотрим в области $\Omega=\{0<x<1,t>0\}$ уравнение теплопроводности

$$\Diamond u(x,t)=f(x,t), \quad (8)$$

с краевыми условиями:

$$u(x,0)=0, \quad (9)$$

$$u(0,t)=0\,, u(1,t)=0. \quad (10)$$

где $\Diamond$ – оператор теплопроводности.

Решение задачи (8)-(10) задается формулой [2]:

$$u(x,t)=\int_0^1\int_0^t G(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\tau\, d\xi\,, \quad (11)$$

где $G(x,t,\xi,\tau)$ – функция Грина задачи (8)–(10).

Пользуясь представлением функции Грина $G(x,t,\xi,\tau)$ см. [2] и непосредственном вычислением, убеждаемся в том, что

$$G(x,t,\xi,\tau)=\theta(t-\tau)\sum_{m=1}^{\infty}e^{-m^2(t-\tau)}\sin(mx)\sin(m\xi)=$$

$$=\frac{\theta(t-\tau)}{2}\left(\sum_{m=1}^{\infty}e^{-m^2(t-\tau)}\cos(m(x-\xi))-\right.$$

$$\left.-\sum_{m=1}^{\infty}e^{-m^2(t-\tau)}\cos(m(x+\xi))\right)= \quad (12)$$

$$=\frac{\theta(t-\tau)}{4}\left(\theta_3\left(\frac{x-\xi}{2\pi},\frac{t-\tau}{\pi}\right)-\right.$$

$$\left.-\theta_3\left(\frac{x+\xi}{2\pi},\frac{t-\tau}{\pi}\right)\right)=\frac{\theta(t-\tau)}{16\pi^2}\cdot\int_{c_-}^{c_+}e^{p\frac{t-\tau}{\pi}}\times$$

$$\times\left(\int_{c'_-}^{c'_+}\frac{2\pi cth\left(\frac{s}{2}\right)-\sqrt{\pi}s\frac{1}{\sqrt{p}}cth\left(\sqrt{\pi}\sqrt{p}\right)}{s^2-4\pi p}e^{s\frac{x-\xi}{2\pi}}ds-\right.$$

$$\left.-\int_{c'_-}^{c'_+}\frac{2\pi cth\left(\frac{\sigma}{2}\right)-\sqrt{\pi}\sigma\frac{1}{\sqrt{p}}cth\left(\sqrt{\pi}\sqrt{p}\right)}{\sigma^2-4\pi p}e^{\sigma\frac{x+\xi}{2\pi}}d\sigma\right)dp,$$

т.е.

$$G(x,t,\xi,\tau)=\frac{\theta(t-\tau)}{16\pi^2}\cdot\int_{c_-}^{c_+}e^{p\frac{t-\tau}{\pi}}\times \quad (13)$$

$$\times\left(\int_{c'_-}^{c'_+}\frac{2\pi cth\left(\frac{s}{2}\right)-\sqrt{\pi}s\frac{1}{\sqrt{p}}cth\left(\sqrt{\pi}\sqrt{p}\right)}{s^2-4\pi p}e^{s\frac{x-\xi}{2\pi}}ds-\right.$$

$$\left.-\int_{c'_-}^{c'_+}\frac{2\pi cth\left(\frac{\sigma}{2}\right)-\sqrt{\pi}\sigma\frac{1}{\sqrt{p}}cth\left(\sqrt{\pi}\sqrt{p}\right)}{\sigma^2-4\pi p}e^{\sigma\frac{x+\xi}{2\pi}}d\sigma\right)dp,$$

где $\theta$ – функция Хэвисайда.

Тем самым доказана

**Теорема.**

Функция Грина для смешанной задачи Коши (8)-(10) уравнения теплопроводности задается формулой (13).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bellman R.* A Brief introduction to Theta functions. 1961. New-York by Hold, Rinehart and Winston. Inc. P. 78.

2. *Владимиров В.С.* Уравнение математической физики. М.: Наука, 1988. С. 512.

3. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов сумм, рядов и произведении. М.: Наука, 1971. С. 1098.

4. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Справочник по операционному исчислению. М.: Изд. высш. шк., 1965. С. 465.

5. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Операционное исчесление по двум переменным и его приложения. М.: Физматгиз, 1958. С. 178.

6. *Дубровин В.А.* Тэта-функции и нелинейные уравнения // Успехи мат. наук. 1981. 36. С. 11-80.

7. *Мамфорт Д.* Лекции о тэта-функциях. М.: Мир, 1988. С. 446.

**Резюме**

Жылу өткізгіштік теңдеуіне қойылған аралас Коши есебінің интегралдық түрі келтірілген.

**Summary**

In this paper integral representation Green's function for the mixed Cauchy's problem for the diffusion equation was established.

*Институт математики,*
*информатики и механики*
*КазНУ им. аль-Фараби*

*Поступила 10.05.08г.*