Т. Ш. КАЛЬМЕНОВ, М. Ю. НЕМЧЕНКО

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Определение. Функцией Грина задачи Дирихле в полупространстве $R_+^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n : x_n > 0\}$ (n - натуральное число):

$$\Delta_x^m u(x) = f(x), \tag{1}$$

$$\frac{\partial^i}{\partial x_n^i} u(x) \Big|_{x_n=0} = 0, \quad i = 0, 1, ..., m-1, \tag{2}$$

называется функция $G_{m,n}(x, y)$, являющаяся решением уравнения

$$\Delta_x^m G_{m,n}(x, y) = \delta(x - y), \tag{3}$$

удовлетворяющая условиям

$$\frac{\partial^i}{\partial x_n^i} G_{m,n}(x, y) \Big|_{x_n=0} = 0, \quad i = 0, 1, ..., m-1, \tag{4}$$

где Δ - оператор Лапласа, $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака.

Существование, единственность и симметричность функции Грина $G_{m,n}(x, y)$ задачи Дирихле (1)-(2) доказаны в работе [1].

Построим в явном виде функцию Грина $G_{m,n}(x, y)$ задачи Дирихле в полупространстве (1)-(2).

Основным результатом работы является

Теорема.

А) В случае нечетного n и четного n при $2m < n$ функция Грина задачи Дирихле (1)-(2) представима в виде:

$$G_{m,n}(x, y) = \varepsilon_{m,n}(x, y) - \sum_{j=0}^{m-1} g_{m,n}^j(x, y), \tag{5}$$

где $\varepsilon_{m,n}(x, y) = d_{m,n} |x - y|^{2m-n}$, $g_{m,n}^0(x, y) = d_{m,n} |x - \bar{y}|^{2m-n}$,

$$g_{m,n}^j(x, y) = d_{m,n}(2m - n)(2(m-1) - n)...(2(m - j + 1) - n) \frac{(-2)^j}{j!} |x - \bar{y}|^{2(m-j)-n} x_n^j y_n^j, \tag{6}$$

($j = 1, ..., m-1$), $\bar{y} = (y_1, y_2, ..., -y_n)$ - точка симметричная к $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ относительно плоскости $x_n = 0$.

В) В случае четного n при $2m \geq n$ функция Грина задачи Дирихле (1)-(2) представима в виде:

$$G_{m,n}(x, y) = \varepsilon_{m,n}(x, y) - g_{m,n}^0(x, y) - \sum_{j=1}^{m-1} g_{m;n}^j(x, y),$$

где $\varepsilon_{m,n}(x, y) = d_{m,n} |x - y|^{2m-n} \ln|x - y|$, $g_{m,n}^0(x, y) = d_{m,n} |x - \bar{y}|^{2m-n} \ln|x - \bar{y}|$,

$$g^j_{m,n}(x,y) = d_{m,n} \mid x-\bar{y} \mid^{2(m-j)-n} x^j_n y^j_n \left[\frac{(-2)^j}{j!}(2m-n)(2(m-1)-n)...(2(m-j+1)-n)\ln \mid x-\bar{y} \mid - \right.$$

$$\left. -\frac{2^{2j}}{2}\left(\frac{1}{j}+\sum_{k=1}^{j-1}\frac{1}{k}\frac{(-1)^{j-k}}{(j-k)!}\frac{(2m-n)}{2}...\frac{(2m-n-2(j-k)+2)}{2}\right)\right], \quad j=\overline{1,\ m-1}.$$

Доказательство теоремы основывается на следующие леммы:

Лемма 1. [4] В пространстве нечетной размерности и в пространстве четной размерности при $2m < n$ фундаментальное решение уравнения (1) задается формулой:

$$\varepsilon_{m,n}(x,y)=d_{m,n}\left|x-y\right|^{2m-n}, \tag{8}$$

где $d_{m,n}=\dfrac{(-1)^m\Gamma\left(\frac{n}{2}-m\right)}{\Gamma(m)2^{2m}\pi^{\frac{n}{2}}}$, $d_{m,n}=\dfrac{1}{(2m-n)(2(m-1)-n)(2(m-2)-n)...(4-n)(2-n)}\cdot\dfrac{1}{(m-1)!}\cdot\dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2^m\pi^{\frac{n}{2}}}$,

$\Gamma(.)$ - гамма функция.

В пространстве четной размерности при $2m \geq n$ фундаментальное решение уравнения (1) задается формулой:

$$\varepsilon_{m,n}(x,y)=d_{m,n}\left|x-y\right|^{2m-n}\ln\left|x-y\right|, \tag{9}$$

где $d_{m,n}=\dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(m)\Gamma\left(m-\frac{n}{2}+1\right)2^{2m-1}\pi^{\frac{n}{2}}}$.

Лемма 2. А) В случае нечетного n и в случае четного n при $2m < n$ функции $g^j_{m,n}(x,y)=d_j\left|x-\bar{y}\right|^{2m-n-2j}x^j_n y^j_n$,

где $d_j=\dfrac{(-2)^j}{j!}d_{m,n}(2m-n)(2(m-1)-n)...(2(m-j+1)-n)$, $(j=0,1,...,m-1)$

являются решениями однородного полигармонического уравнения:

$$\Delta^m_x g^j_{m,n}(x,y)=0.$$

В) В случае четного n при $2m \geq n$ функции

$$g^j_{m,n}(x,y)=d_{m,n}\left|x-\bar{y}\right|^{2(m-j)-n}x^j_n y^j_n\left[\frac{(-2)^j}{j!}(2m-n)(2(m-1)-n)...(2(m-j+1)-n)\ln\left|x-\bar{y}\right|-\right.$$

$$\left.-\frac{2^{2j}}{2}\left(\frac{1}{j}+\sum_{k=1}^{j-1}\frac{1}{k}\frac{(-1)^{j-k}}{(j-k)!}\frac{(2m-n)}{2}...\frac{(2m-n-2(j-k)+2)}{2}\right)\right], \ j=\overline{1,m-1}$$

являются решениями однородного полигармонического уравнения:

$$\Delta^m_x g^j_{m,n}(x,y)=0.$$

Доказательство пункта **А)** леммы 2 проведем методом математической индукции по m.

При $m = 1$ выполняется равенство: $\Delta_x g^0_{1,n}(x,y)=\Delta_x d_{1,n}\left|x-\bar{y}\right|^{2-n}=0$ (так как $\bar{y}\notin R^n_+$).

Пусть при $m-1$ выполняется равенство: $\Delta_x^{m-1} g_{m-1,n}^j(x,y)=0,\ j=0,1,\ldots,m-2$.

Тогда верна следующая цепочка равенств:

$$\Delta_x^m g_{m,n}^j(x,y)=\Delta_x^{m-1}\left(\Delta_x\left(d_j\left|x-\bar{y}\right|^{2m-n-2j} x_n^j y_n^j\right)\right)=$$
$$=d_j((2m-n-2j)(2m-2j)\Delta_x^{m-1}\left|x-\bar{y}\right|^{2(m-1)-n-2j} x_n^j y_n^j+$$
$$+2(2m-n-2)j\,\Delta_x\left(\Delta_x^{m-2}\left|x-\bar{y}\right|^{2(m-2)-n-2(j-1)} x_n^{j-1} y_n^{j-1}\right)+$$
$$+j(j-1)\Delta_x\left(\Delta_x^{m-2}\left|x-\bar{y}\right|^{2(m-2)-n-2(j-2)} x_n^{j-2} y_n^{j-2}\right)=0.$$

Пункт **А)** доказан.

Доказательство пункта **В)** леммы 2 проводится методом математической индукции по m аналогично доказательству пункта А).

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы.

Введем следующее обозначение:

$$\left|x-y\right|^2=\mathrm{B}^2,\ \left|x-\bar{y}\right|^2=\mathrm{A}^2, 4x_n y_n=C^2$$

Очевидно, справедливо тождество

$$A^2-B^2=C^2. \tag{10}$$

Так как $\frac{C^2}{A^2}\le 1$, то в пространстве нечетной размерности при $2m\ge n$ фундаментальное решение уравнения (1) разлагаем в бесконечный ряд:

$$\varepsilon_{m,n}(x,y)=d_{m,n}\,\mathrm{B}^{2m-n}=d_{m,n}\,\mathrm{A}^{2m-n}\left(1-\frac{C^2}{\mathrm{A}^2}\right)^{\frac{2m-n}{2}}=$$
$$=d_{m,n}\,\mathrm{A}^{2m-n}\left(1+(-1)\frac{(2m-n)}{2}\frac{C^2}{A^2}+\frac{(-1)^2}{2!}\frac{(2m-n)}{2}\frac{(2m-n-2)}{2}\left(\frac{C^2}{A^2}\right)^2+\ldots\right. \tag{11}$$
$$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{(2m-n)}{2}\ldots\left(\frac{2m-n}{2}-m+1+1\right)\left(\frac{C^2}{A^2}\right)^{m-1}+\frac{(-1)^m}{m!}\frac{(2m-n)}{2}\ldots\left(\frac{2m-n}{2}-m+1\right)\left(\frac{C^2}{A^2}\right)^m+$$
$$\left.\frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!}\frac{(2m-n)}{2}\ldots\left(\frac{2m-n}{2}-m+1\right)\left(\frac{2m-n}{2}-m\right)\left(\frac{C^2}{A^2}\right)^{m+1}+\ldots\ldots\ldots\ldots\right).$$

Так как $\frac{C^2}{A^2}<1$ при $x\ne y$, то в пространстве нечетной размерности при $2m<n$ и в пространстве четной размерности при $2m<n$ фундаментальное решение уравнения (1) разлагаем в бесконечный ряд (11).

Поскольку функции $g_{m,n}^j(x,y)=d_j\left|x-\bar{y}\right|^{2m-n-2j} x_n^j y_n^j$, где $d_j=\frac{(-2)^j}{j!}d_{m,n}(2m-n)(2(m-1)-n)\ldots(2(m-j+1)-n)$, $(j=0,1,\ldots,m-1)$ являются решениями однородного полигармонического уравнения $\Delta_x^m g_{m,n}^j(x,y)=0$ (Лемма 2), то функция Грина имеет вид:

$$G_{m,n}(x,y)= d_{m,n}\left|x-y\right|^{2m-n} -d_{m,n}\left|x-\bar{y}\right|^{2m-n} -\sum_{j=1}^{m-1} d_j \left|x-\bar{y}\right|^{2(m-j)-n} x_n^j y_n^j =$$

$$=d_{m,n}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{(2m-n)(2(m-1)-n)...(2(m-k+1)-n)}{2^k}\left|x-\bar{y}\right|^{2(m-k)-n} 2^{2k} x_n^k y_n^k. \qquad (12)$$

На основании равенства (12) для функции Грина выполняются краевые условия:

$$\left.\frac{\partial^i}{\partial x_n^i} G_{m,n}(x,y)\right|_{x_n=0} =0,\ i=0,1,...,m-1.$$

Таким образом, в случае нечетного n и в случае четного n при $2m < n$ функция Грина задачи Дирихле (1)-(2) представляется в виде:

$$G_{m,n}(x,y)=d_{m,n}\left[\ \left|x-y\right|^{2m-n} -\left|x-\bar{y}\right|^{2m-n}\ \right]-$$

$$-\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(-2)^j}{j!}(2m-n)(2(m-1)-n)...(2(m-j+1)-n)\,d_{m,n}\left|x-\bar{y}\right|^{2(m-j)-n} x_n^j\, y_n^j. \qquad (13)$$

Пункт **A)** теоремы доказан.

Доказательство пункта **B)** теоремы.

Так как $\frac{C^2}{A^2}\le 1$, то в пространстве четной размерности при $2m \ge n$ фундаментальное решение уравнения (1) разлагаем в бесконечный ряд:

$$\varepsilon_{m,n}(x,y)=d_{m,n}\left|x-y\right|^{2m-n}\ln\left|x-y\right|=d_{m,n}B^{2m-n}\ln B=d_{m,n}\left(A^2-C^2\right)^{\frac{2m-n}{2}}\left(\ln A+\ln\sqrt{1-\frac{C^2}{A^2}}\right)=$$

$$=d_{m,n}A^{2m-n}\ln A+d_{m,n}A^{2(m-1)-n}C^2\left((-1)\frac{(2m-n)}{2}\ln A-\frac{1}{2}\right)+$$

$$+d_{m,n}A^{2(m-2)-n}\left(C^2\right)^2\left(\frac{(-1)^2}{2!}\frac{(2m-n)}{2}\frac{(2m-n-2)}{2}\ln A-\frac{1}{2}\left[(-1)\frac{(2m-n)}{2}+\frac{1}{2}\right]\right)+...$$

$$...+d_{m,n}A^{2(m-i+1)-n}\left(C^2\right)^i\left[\frac{(-1)^i}{i!}\frac{(2m-n)}{2}\frac{(2m-n-2)}{2}...\frac{(2(m-i+1)-n)}{2}\ln\left|x-\bar{y}\right|-\right.$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!}\frac{(2m-n)}{2}...\frac{(2m-n-2(i-1)+2)}{2}+\frac{1}{2}\frac{(-1)^{i-2}}{(i-2)!}\frac{(2m-n)}{2}...\frac{(2m-n-2(i-1)+4)}{2}+...\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{(i-2)}\frac{(-1)^2}{2!}\frac{(2m-n)}{2}\frac{(2m-n-2)}{2}+\frac{1}{(i-1)}(-1)\frac{(2m-n)}{2}+\frac{1}{i}\right)\right]+....$$

Поскольку функции

$$g_{m,n}^j(x,y)=d_{m,n}\left|x-\bar{y}\right|^{2m-n-2j} x_n^j\, y_n^j\ \left[\frac{(-2)^j}{j!}(2m-n)(2(m-1)-n)...(2(m-j+1)-n)\ln\left|x-\bar{y}\right|-\right.$$

$$\left.-\frac{2^{2j}}{2}\left(\frac{1}{j}+\sum_{k=1}^{j-1}\frac{1}{k}\frac{(-1)^{j-k}}{(j-k)!}\frac{(2m-n)}{2}\frac{(2(m-1)-n)}{2}...\frac{(2m-n-2(j-k-1))}{2}\right)\right],\ (j=1,...,m-1)$$

являются решениями однородного полигармонического уравнения $\Delta_x^m g_{m,n}^j(x,y)=0$ (Лемма 2), то функция Грина имеет вид:

$$G_{m,n}(x,y)=d_{m,n}\left|x-y\right|^{2m-n}\ln\left|x-y\right|-d_{m,n}\left|x-\bar{y}\right|^{2m-n}\ln\left|x-\bar{y}\right|-$$

$$-\sum_{j=1}^{m-1} d_{m,n}\left|x-\bar{y}\right|^{2m-n-2j} x_n^j y_n^j \left[\frac{(-2)^j}{j!}(2m-n)(2(m-1)-n)\ldots(2(m-j+1)-n)\ln\left|x-\bar{y}\right|-\right.$$

$$\left.-\frac{2^{2j}}{2}\left(\frac{1}{j}+\sum_{k=1}^{j-1}\frac{1}{k}\frac{(-1)^{j-k}}{(j-k)!}\frac{(2m-n)}{2}\frac{(2(m-1)-n)}{2}\ldots\frac{(2m-n-2(j-k-1))}{2}\right)\right]=$$

$$=\sum_{i=m}^{\infty} d_{m,n}\left|x-\bar{y}\right|^{2m-n-2j} x_n^j y_n^j \left[\frac{(-2)^j}{j!}(2m-n)(2(m-1)-n)\ldots(2(m-j+1)-n)\ln\left|x-\bar{y}\right|-\right.$$

$$\left.-\frac{2j}{2}\left(\frac{1}{j}+\sum_{k=1}^{j-1}\frac{1}{k}\frac{(-1)^{j-k}}{(j-k)!}\frac{(2m-n)}{2}\frac{(2(m-1)-n)}{2}\ldots\frac{(2m-n-2(j-k-1))}{2}\right)\right]. \qquad (14)$$

На основании равенства (14) для функции Грина выполняются краевые условия: $\left.\frac{\partial^i}{\partial x_n^i}G_{m,n}(x,y)\right|_{x_n=0}=0,\ i=0,1,\ldots,m-1$.

Таким образом, в случае четного n при $2m\geq n$ функция Грина задачи Дирихле (1)-(2) представима в виде:

$$G_{m,n}(x,y)=d_{m,n}\left|x-y\right|^{2m-n}\ln\left|x-y\right|-d_{m,n}\left|x-\bar{y}\right|^{2m-n}\ln\left|x-\bar{y}\right|-$$

$$-\sum_{j=1}^{m-1} d_{m,n}\left|x-\bar{y}\right|^{2m-n-2j} x_n^j y_n^j \left[\frac{(-2)^j}{j!}(2m-n)(2(m-1)-n)\ldots(2(m-j+1)-n)\ln\left|x-\bar{y}\right|-\right. \qquad (15)$$

$$\left.-\frac{2^{2j}}{2}\left(\frac{1}{j}+\sum_{k=1}^{j-1}\frac{1}{k}\frac{(-1)^{j-k}}{(j-k)!}\frac{(2m-n)}{2}\frac{(2(m-1)-n)}{2}\ldots\frac{(2m-n-2(j-k-1))}{2}\right)\right].$$

Теорема доказана полностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966.
2. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1985.
3. *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
4. *Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Искакова У.А.* Структура спектра краевых задач для дифференциальных уравнений. Алматы: Препринт, 2005. 54 с.
5. *Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D., M.Y.* Nemchenko Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere // Complex variables and Elliptic equations. 2008. V. 53, N 2.
6. *Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Немченко М.Ю.* Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре // Доклады Академии наук. 2008. Т. 421, №3. 305-307 с.

Резюме

Полигармоникалық теңдеулер үшін Дирихле есебінің Грин функциясы айқын түрде кез келген өлшемді кеңістік үшін жарты кеңістікте құрастырылғаны баяндалған.

Summary

In this work the Green function for the Dirichlet problem was constructed in explicit form in a half-space of arbitrary dimension for the polyharmonic equations.

Поступила 5.06.08г.