И. Р. КАПШАЕВ

О РЕШЕНИЯХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

1. Постановка задачи. Рассмотрим линейное сингулярно возмущенное интегродифференциальное уравнение в частных производных вида

$$L_\varepsilon \equiv \varepsilon H^2[y] + A(t,x)H[y] + B(t,x)y =$$

$$= F(t,x) + \int_0^1 [K_1(t,s,x)H[y] + K_0(t,s,x)y]ds, \quad (1)$$

удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$y(0,x,\varepsilon) = \pi_0(x), \quad y_t'(0,x,\varepsilon) = \pi_1(x). \quad (2)$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $(t,x) \in G$ – независимые переменные, $y = y(t,x,\varepsilon)$ – искомая функция, $A(t,x)$, $B(t,x)$, $F(t,x)$, $K_i(t,s,x)$ и $\pi_i(x)$ $(i = 0,1)$ – функции, заданные в $G = \{(t,x)$: $0 \le t \le 1, \lambda_1(t) \le x \le \lambda_2(t)\}$, а операторы:

$$H[y] = < e(t,x) \cdot grady >, \quad H^2[y] = H[H[y]],$$

где знаком $< \cdot >$ обозначено скалярное произведение векторов $e(t,x) = (1, Q(t,x))$ и $grady = (\frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial x})$, а функция $Q(t,x)$ также задана в G.

Предположим, что:

I. Функции $A(t,x)$, $B(t,x)$, $F(t,x)$, $K_i(t,s,x)$ и $\pi_i(x)$ достаточно гладкие по совокупности аргументов $(t,x) \in G$, $(i = 0,1)$.

II. Функции $A(t,x)$, $Q(t,x)$ и $\pi_s(x)$ удовлетворяют условиям:

$$A(t,x) \ge \gamma > 0, \quad Q(t,x) \ge \sigma > 0, \quad (t,x) \in G,$$

где $\gamma, \sigma > 0$ – некоторые вещественные числа.

III. Функции $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ являются решениями уравнения характеристики $\frac{d\lambda}{dt} = Q(t,\lambda)$, соответствующего (1), и удовлетворяют начальным условиям $\lambda_1(0) = 0$, $\lambda_2(0) = 1$.

IV. Число 1 не является собственным числом ядра:

$$K(t,s,x) = \frac{1}{A(s,x)}\left(K_1(t,s,x) + \int_s^1 [K_0(t,\tau,x) - \right.$$

$$\left. - K_1(t,\tau,x) \cdot \frac{B(\tau,x)}{A(\tau,x)}] \cdot e^{-\int_x^\tau \frac{B(\xi,x)}{A(\xi,x)} d\xi} d\tau \right). \quad (3)$$

Наряду с уравнением рассмотрим также невозмущенное уравнение:

$$A(t,x)H[y_0] + B(t,x)y_0 = \quad (4)$$

$$= F(t,x) + \int_0^1 [K_1(t,s,x)H[y_0] + K_0(t,s,x)y_0]ds,$$

полученное из (1) при $\varepsilon = 0$ и удовлетворяющее начальному условию:

$$y_0(t,x) = \pi_0(x). \quad (5)$$

Цель работы: 1) вывести формулы для решения $y_0(t,x)$ невозмущенной задачи (4), (5); 2) установить оценки для решения возмущенной задачи (1), (2); 3) доказать, что разность между решением $y(t,x,\varepsilon)$ возмущенной задачи (1), (2) и решением $y_0(t,x)$ невозмущенной задачи в G достаточно мала вместе с ε. Заметим, что для интегродифференциальных уравнений в частных производных вида (1) эти вопросы рассматриваются впервые. Отметим также, что для обыкновенных интегродифференциальных уравнений аналогичные задачи исследованы в [1].

2. Невозмущенное уравнение. Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть выполняются условия I–IV. Тогда невозмущенная задача (4), (5) имеет в области G единственное решение.

Доказательство. В самом деле, введем следующее обозначение:

$$z(t,x) = F(t,x) + \int_0^1 (K_1(t,s,x)H[y_0(s,x)] +$$

$$+ K_0(t,s,x)y_0(s,x))ds. \quad (6)$$

Тогда решение задачи (4), (5) можно представить в виде

$$y_0(t,x)=\pi(\psi(t,x))\cdot e^{-\int_0^t \frac{B(\xi,\varphi)}{A(\xi,\varphi)}d\xi}+$$

$$+\int_0^t \frac{z(\tau,\varphi)}{A(\tau,\varphi)}\cdot e^{-\int_\tau^t \frac{B(\xi,\varphi)}{A(\xi,\varphi)}d\xi}d\tau, \qquad (7)$$

где функции $\varphi=\varphi(t,\psi)$ и $\psi=\psi(t,x)$ те же, что и в [2].

Подставляя (7) в (6), получаем

$$z(t,\varphi)=f(t,\varphi)+\int_0^1 K(t,s,\varphi)\cdot z(s,\varphi), \qquad (8)$$

где ядро $K(t,s,\varphi)$ выражается формулой (3), а функция $f(t,\varphi)$ имеет вид

$$f(t,\varphi)=F(t,\varphi)+\pi_0(\psi)\cdot\int_0^1[K_0(t,s,\varphi)-$$

$$-K_1(t,s,\varphi)\cdot\frac{B(s,\varphi)}{A(s,\varphi)}]\cdot e^{-\int_0^s \frac{B(\xi,\varphi)}{A(\xi,\varphi)}d\xi}ds. \qquad (9)$$

Так как выполнены условия I–IV, то интегральное уравнение (8) на основании теоремы о существовании и единственности решений имеет в G единственное решение $z(t,\varphi)$. Следовательно, учитывая (7), заключаем, что невозмущенная задача (4), (5) имеет также единственное решение в G. Тем самым теорема 1 доказана.

Определим теперь формулу для решения невозмущенной задачи (4), (5). С этой целью обозначим через $R(t,s,\varphi)$ резольвенту ядра $K(t,s,\varphi)$. Тогда решение $z(t,\varphi)$ интегрального уравнения (8) будет иметь вид

$$z(t,\varphi)=f(t,\varphi)+\int_0^1 R(t,s,\varphi)f(s,\varphi)ds. \qquad (10)$$

Из (10), учитывая (9), получаем

$$z(t,\varphi)=\beta(t,\varphi)+\pi_0(\psi)\cdot(\alpha(t,\varphi)+$$

$$+\int_0^1 R(t,s,\varphi)\alpha(s,\varphi)ds), \qquad (11)$$

где функции $\alpha(t,x)$ и $\beta(t,x)$ выражаются формулами:

$$\alpha(t,\varphi)=\int_0^1[K_0(t,\tau,\varphi)-K_1(t,\tau,\varphi)\cdot\frac{B(\tau,\varphi)}{A(\tau,\varphi)}]\times$$

$$\times\exp(-\int_0^\tau\frac{B(\xi,\varphi)}{A(\xi,\varphi)}d\xi)d\tau,$$

$$\beta(t,\varphi)=F(t,\varphi)+\int_0^1 R(t,\tau,\varphi)F(\tau,\varphi)d\tau. \qquad (12)$$

Таким образом, учитывая (7), (11), решение $y_0(t,x)$ невозмущенной задачи (4), (5) получаем в следующем виде:

$$y_0(t,x)=\pi_0(\psi)\left[e^{-\int_\tau^t \frac{B(\xi,\varphi)}{A(\xi,\varphi)}d\xi}+\int_0^t\frac{1}{A(\tau,\varphi)}\cdot e^{-\int_\tau^t \frac{B(\xi,\varphi)}{A(\xi,\varphi)}d\xi}\times\right.$$

$$\left.\times(\alpha(\tau,\varphi)+\int_0^1 R(\tau,s,\varphi)\alpha(s,\varphi)ds)d\tau\right]+$$

$$+\int_0^t\frac{\beta(\tau,\varphi)}{A(\tau,\varphi)}\cdot e^{-\int_\tau^t \frac{B(\xi,\varphi)}{A(\xi,\varphi)}d\xi}d\tau. \qquad (13)$$

3. Функция типа Коши. Будем говорить, что функция $\Phi_\varepsilon(t,x,t')$ является функцией типа Коши, если для $\forall(t,x)\in G$ она является решением следующей задачи:

$$\varepsilon H^2[\Phi_\varepsilon]+A(t,x)H[\Phi_\varepsilon]+B(t,x)\Phi_\varepsilon=0, \qquad (14)$$

$$\Phi_\varepsilon(t',x,t')=0,\ \Phi'_{\varepsilon t}(t',x,t')=1, 0\le t'\le t\le 1. \qquad (15)$$

Лемма 1. Пусть выполнены условия I–III. Тогда для функции $\Phi_\varepsilon(t,x,t')$ в G справедливы следующие оценки:

$$|\Phi_\varepsilon(t,x,t')|\le K\cdot\varepsilon,\quad \left|\frac{\partial\Phi_\varepsilon(t,x,t')}{\partial t}\right|\le K\cdot\varepsilon+K\cdot e^{-\gamma},$$

$$\left|\frac{\partial\Phi_\varepsilon(t,x,t')}{\partial x}\right|\le K\cdot\varepsilon+K\cdot e^{-\gamma\cdot\frac{t-t'}{\varepsilon}}, \qquad (16)$$

где $K>0$ и $\gamma>0$ не зависят от t, x и ε.

Доказательство. В самом деле, рассмотрим вспомогательную задачу:

$$H[\Phi_\varepsilon(t,x,t')]=z_\varepsilon(t,x,t'),\quad \Phi(t,x,t')=0. \qquad (17)$$

Выражая функцию $\Phi_\varepsilon(t,x,t')$ из задачи (17), будем иметь

$$\Phi_\varepsilon(t,x,t')=\int_{t'}^t z_\varepsilon(s,\varphi,t')ds. \qquad (18)$$

Теперь с учетом (17), (18) из задачи (14), (15) получим

$$\varepsilon H[z_\varepsilon]+A(t,\varphi)z_\varepsilon=-B(t,\varphi)\int_{t'}^t z_\varepsilon(s,\varphi,t')ds, \qquad (19)$$

$$z_\varepsilon(t',x,t')=1. \qquad (20)$$

Легко убедиться, что задача (19), (20) эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$z_\varepsilon(t,\varphi,t') = V_\varepsilon + \int_{t'}^{t} T_\varepsilon(t,s,\varphi) z_\varepsilon(s,\varphi,t') ds, \quad (21)$$

где ядро имеет $T_\varepsilon(t,s,\varphi)$ вид:

$$T_\varepsilon(t,s,\varphi) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} V_\varepsilon(t,x,t') V_\varepsilon^{-1}(\tau,\varphi,t') B(\tau,\varphi) d\tau, \quad (22)$$

а функция $V_\varepsilon = V_\varepsilon(t,x,t')$ является решением следующей задачи:

$$\varepsilon H[V_\varepsilon] + A(t,\varphi)V_\varepsilon = 0, \quad V_\varepsilon|_{t=t'} = 1. \quad (23)$$

Решая задачу (23) способом, аналогичным, как в [2], и учитывая условие II, получаем

$$|V_\varepsilon(t,\varphi,t')| \le K \cdot \exp(-\frac{t-t'}{\varepsilon}), \quad 0 \le t' \le t \le 1. \quad (24)$$

Из (22), учитывая (24), будем иметь

$$|T_\varepsilon(t,s,\varphi)| \le K, \quad 0 \le s \le t \le 1. \quad (25)$$

Теперь оценим интегральное уравнение (21). Тогда из (21), учитывая оценки (24) и (25), будем иметь

$$|z_\varepsilon(t,\varphi,t')| \le$$

$$\le K \cdot \exp(-\gamma \cdot \frac{t-t'}{\varepsilon}) + K \cdot \int_{t'}^{t} |z_\varepsilon(s,\varphi,t')| ds. \quad (26)$$

Откуда, используя обобщенную лемму Гронуолла–Беллмана, получаем

$$|H[\Phi_\varepsilon(t,x,t')]| \le K \cdot \varepsilon + K \cdot \exp(-\gamma \cdot \frac{t-t'}{\varepsilon}). \quad (27)$$

Из (27), учитывая, что $H[\Phi_\varepsilon(t,x,t')]$ является скалярным произведением векторов $e(t,x) = (1, Q(t,x))$ и grad $y = (\frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial x})$, получаем второе и третье соотношение в (16). Также учитывая (27) и соотношение

$$\Phi_\varepsilon(t,x,t') = \int_{t'}^{t} H[\Phi_\varepsilon(\tau,\varphi,t')] d\tau,$$

убеждаемся в справедливости первой оценки в (16). Лемма 1 доказана.

4. Оценка решения. Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть выполнены условия I–IV. Тогда для решения $y(t,x,\varepsilon)$ возмущенной задачи (1), (2) в G справедливы следующие оценки:

$$|y(t,x,\varepsilon)| \le K \cdot |y(0,x,\varepsilon)| + K \cdot \varepsilon \cdot |y_t'(0,x,\varepsilon)| +$$

$$+ K \cdot \max_{(t,x)\in G} |F(t,x)|$$

$$|y_t'(t,x,\varepsilon)| \le K \cdot |y(0,x,\varepsilon)| + K \cdot \varepsilon \cdot |y_t'(0,x,\varepsilon)| +$$

$$|y_x'(t,x,\varepsilon)| \le K \cdot |y(0,x,\varepsilon)| + K \cdot \varepsilon \cdot |y_t'(0,x,\varepsilon)| + \quad (28)$$

$$+ K \cdot \max_{(t,x)\in G} |F(t,x)| + K \cdot |y_t'(0,x,\varepsilon)| \cdot \exp(-\gamma \cdot \frac{t}{\varepsilon}),$$

где $K > 0$ и $\gamma > 0$ не зависят от t, x и ε.

Доказательство. В самом деле, рассматривая правую часть уравнения (1) как неоднородность, т.е.

$$z(t,x,\varepsilon) = F(t,x) + \int_0^1 (K_1(t,s,x) H[y(s,x,\varepsilon)] +$$

$$| + K_0(t,s,x) y(s,x,\varepsilon)) ds, \quad (29)$$

решение $y(t,x,\varepsilon)$ задачи (1), (2) с помощью функции типа Коши $\Phi_\varepsilon(t,x,t')$ можно представить в виде:

$$y(t,x,\varepsilon) = \pi_0(\psi) \cdot (1 - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \Phi_\varepsilon(t,\varphi,t') B(t',\varphi) dt') +$$

$$+ \Phi_\varepsilon(t,\varphi,0)\pi_1(\psi) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \Phi_\varepsilon(t,\varphi,t') z(t',\varphi,\varepsilon) dt'. \quad (30)$$

Подставляя (30) в (29), получаем для определения $z(t,\varphi,\varepsilon)$ следующее интегральное уравнение типа Фредгольма:

$$z(t,\varphi,\varepsilon) = f_\varepsilon(t,\varphi) + \int_0^1 K_\varepsilon(t,s,\varphi) z(s,\varphi,\varepsilon) ds, \quad (31)$$

где ядро $K_\varepsilon(t,s,\varphi)$ и свободный член $f_\varepsilon(t,\varphi)$ выражается формулами:

$$K_\varepsilon(t,s,\varphi) = \frac{1}{\varepsilon}\int_s^1 (K_1(t,s,\varphi) H[\Phi_\varepsilon(t,\varphi,t')] +$$

$$+ K_0(t,s,\varphi)\Phi_\varepsilon(t,\varphi,t')) ds,$$

$$f_\varepsilon(t,\varphi) = F(t,\varphi) + \varepsilon\pi_1(\psi) K_\varepsilon(t,\varphi) +$$

$$+ \pi_0(\psi) \cdot \int_0^1 (K_0(t,s,\varphi) - K_\varepsilon(t,s,\varphi) B(s,\varphi)) ds, \quad (32)$$

и с учетом условий I–III и соотношений (16), (27) имеют место оценки:

$$|K_\varepsilon(t,s,\varphi)| \le K, \quad 0 \le s \le t \le 1,$$

$$|f_\varepsilon(t,\varphi)| \le K \cdot |\pi_0(\psi)| + K \cdot \varepsilon \cdot |\pi_1(\psi)| +$$

$$+ K \cdot \max_{(t,x)\in G} |F(t,\varphi)|, \quad t,x \in G. \quad (33)$$

Пусть $R_\varepsilon(t,s,\varphi)$ – резольвента ядра $K_\varepsilon(t,s,\varphi)$. Тогда решение интегрального уравнения (31) можно записать в виде

$$z(t,\varphi,\varepsilon)=f_\varepsilon(t,\varphi)+\int_0^1 R_\varepsilon(t,s,\varphi)f_\varepsilon(s,\varphi)ds. \quad (34)$$

Оценивая (34) и учитывая (33), получаем

$$|z(t,\varphi,\varepsilon)|\le K\cdot|\pi_0(\psi)|+K\cdot\varepsilon\cdot|\pi_1(\psi)|+$$
$$+K\cdot\max_{(t,x)\in G}|F(t,\varphi)|,\quad t,x\in G. \quad (35)$$

Если теперь оценить формулу (30) и ее частные производные по t и x и учесть (16), (35), то получим искомые оценки (28). Теорема 2 доказана.

5. Оценка отклонения. Для разности между решением $y(t,x,\varepsilon)$ задачи (1), (2) и решением $y_0(t,x)$ задачи (4), (5) справедлива следующая

Теорема 3. Пусть выполнены условия I–IV. Тогда в G справедливы следующие оценки:

$$|y(t,x,\varepsilon)-y_0(t,x)|\le K\cdot\varepsilon+K\cdot\varepsilon\cdot|y'_t(0,x,\varepsilon)|$$
$$|y'_t(t,x,\varepsilon)-y'_{0t}(t,x)|\le K\cdot\varepsilon+K\cdot\varepsilon\cdot|y'_t(0,x,\varepsilon)|+$$
$$+K\cdot e^{-\gamma\cdot\frac{t}{\varepsilon}}\left(1+|y'_t(0,x,\varepsilon)|\right),$$
$$|y'_x(t,x,\varepsilon)-y'_{0x}(t,x)|\le K\cdot\varepsilon+K\cdot\varepsilon\cdot|y'_t(0,x,\varepsilon)|+$$
$$+K\cdot e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}}\left(1+|y'_t(0,x,\varepsilon)|\right), \quad (36)$$

где $K>0$ и $\gamma>0$ не зависят от t, x и ε.

Доказательство. Действительно, из уравнения (1) с помощью замены $y(t,x,\varepsilon)=y_0(t,x)+$ $+u(t,x,\varepsilon)$ получаем

$$L_\varepsilon u=\int_0^1[K_1(t,s,x)H[u]+K_0(t,s,x)u]ds-$$
$$-\varepsilon H^2[y_0(t,x)]. \quad (37)$$

Применяя теперь к (37) теорему 2 и учитывая теорему 1, получаем искомые оценки (36). Теорема 3 доказана.

Следствие. Из теоремы 3 следует, что для $(0<t\le 1,x)\in G$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}y(t,x,\varepsilon)=y_0(t,x),$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}y'_t(t,x,\varepsilon)=y'_0(t,x),$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}y'_x(t,x,\varepsilon)=y'_0(t,x).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Касымов К.А.* Линейные сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения второго порядка. Алма-Ата: Наука, 1981. 123 с.

2. *Тажимуратов И.Т., Капшаев И.Р.* Оценки решений линейных сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Вольтерра // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. 2000. № 2(21). С. 100-106.

Резюме

Дербес туындылы екінші ретті сингулярлы ауытқыған Фредгольм типтес интегралды дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есебіне бағалаулар алынған.

Кіші параметр нольге ұмтылған жағдайда ауытқыған есептің шешімі ауытқымаған есептің шешіміне ұмтылатыны дәлелденген.

Summary

The estimations for the solutions of the Cauchy problems for the singular perturbed partial second order integral differential equations have suggesting.

Have proving that the solution of the perturbed problem going to the solution of the nonpertubed problem when small parameter going to zero.

УДК 517.938

Институт математики
МОН РК, г. Алматы

Поступила 7.01.06 г.