С. Ш. КОЖЕГЕЛЬДИНОВ

ОБ ОСНОВНЫХ СЕРВАСОВЫХ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДАХ

1. Напомним, что сервасовым параллелепипедом называется прямоугольный параллелепипед, ребра и диагонали которого выражаются натуральными числами, и что сервасов параллелепипед $< x, y, z; t >$, где x, y, z – ребра, t - диагональ, называется основным, если $(x, y, z, t) = 1$, т.е. если x, y, z, t – взаимно простые числа.

Хотя знание рационального прямоугольного параллелепипеда определяет сервасов параллелепипед и, наоборот, знание сервасова параллелепипеда определяет рациональный прямоугольный параллелепипед, вполне естественной является постановка и решение следующей задачи.

2. Постановка задачи. Пусть $\{< x, y, z, t > | (x, y, z, t) = 1\}$ или, более подробно, пусть $\{< x, y, z, t > | x, y, z, t \in N, (x, y, z, t) = 1, x^2 + y^2 + z^2 = t^2\}$ - множество всех основных сервасовых параллелепипедов. Требуется найти общую формулу, описывающую все эти параллелепипеды. При этом ставится задача, чтобы число целых параметров, входящих в общую формулу всех основных сервасовых параллелепипедов, не превышало трех.

Для решения поставленной задачи используются идеи, методы и результаты работ [1-5, 9-11, 14].

3. Теорема. Каждая из следующих эквивалентных формул:

$$x = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{\Delta_1}, \quad y = \frac{2ab}{\Delta_1}, \quad z = \frac{2ac}{\Delta_1}, \quad t = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\Delta_1}, \tag{1}$$

где

$$a, b, c \in N, \quad a^2 > b^2 + c^2, \quad (a, b, c) = 1, \quad \Delta_1 = (2a, a^2 - b^2 - c^2); \tag{2}$$

$$x = \frac{2\alpha\beta}{\Delta_2}, \quad y = \frac{2\alpha\gamma}{\Delta_2}, \quad z = \frac{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}{\Delta_2}, \quad t = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\Delta_2}, \tag{3}$$

где

$$\alpha, \beta, \gamma \in N, \quad \alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2, \quad (\alpha, \beta, \gamma) = 1, \quad \Delta_2 = (2\alpha, \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2); \tag{4}$$

$$x = \frac{2ac}{\Delta_1}, \quad y = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{\Delta_1}, \quad z = \frac{2ab}{\Delta_1}, \quad t = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\Delta_1}, \tag{5}$$

где

$$a,b,c \in N, \quad a^2 > b^2 + c^2, \quad (a,b,c) = 1, \quad \Delta_1 = \left(2a, a^2 - b^2 - c^2\right); \tag{6}$$

$$x = \frac{2\alpha\gamma}{\Delta_2}, \quad y = \frac{2\alpha\beta}{\Delta_2}, \quad z = \frac{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}{\Delta_2}, \quad t = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\Delta_2}, \tag{7}$$

где

$$\alpha,\beta,\gamma \in N, \quad \alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2, \quad (\alpha,\beta,\gamma) = 1, \quad \Delta_2 = \left(2\alpha, \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2\right); \tag{8}$$

$$x = \frac{2ab}{\Delta_1}, \quad y = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{\Delta_1}, \quad z = \frac{2ac}{\Delta_1}, \quad t = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\Delta_1}, \tag{9}$$

где

$$a,b,c \in N, \quad a^2 > b^2 + c^2, \quad (a,b,c) = 1, \quad \Delta_1 = \left(2a, a^2 - b^2 - c^2\right); \tag{10}$$

$$x = \frac{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}{\Delta_2}, \quad y = \frac{2\alpha\gamma}{\Delta_2}, \quad z = \frac{2\alpha\beta}{\Delta_2}, \quad t = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\Delta_2}, \tag{11}$$

где

$$\alpha,\beta,\gamma \in N, \quad \alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2, \quad (\alpha,\beta,\gamma) = 1, \quad \Delta_2 = \left(2\alpha, \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2\right); \tag{12}$$

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{\Delta_3}, \quad y = \frac{2ab}{\Delta_3}, \quad z = \frac{2ac}{\Delta_3}, \quad t = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\Delta_3}, \tag{13}$$

где

$$a,b,c \in N, \quad a^2 < b^2 + c^2, \quad (a,b,c) = 1, \quad \Delta_3 = \left(2a, b^2 + c^2 - a^2\right); \tag{14}$$

$$x = \frac{2\alpha\beta}{\Delta_4}, \quad y = \frac{2\alpha\gamma}{\Delta_4}, \quad z = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{\Delta_4}, \quad t = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\Delta_4}, \tag{15}$$

где

$$\alpha,\beta,\gamma \in N, \quad \alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2, \quad (\alpha,\beta,\gamma) = 1, \quad \Delta_4 = \left(2\alpha, \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2\right); \tag{16}$$

$$x = \frac{2ac}{\Delta_3}, \quad y = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{\Delta_3}, \quad z = \frac{2ab}{\Delta_3}, \quad t = \frac{b^2 + c^2 + a^2}{\Delta_3}, \tag{17}$$

где

$$a,b,c \in N, \quad a^2 < b^2 + c^2, \quad (a,b,c) = 1, \quad \Delta_3 = \left(2a, b^2 + c^2 - a^2\right); \tag{18}$$

$$x = \frac{2\alpha\gamma}{\Delta_4}, \quad y = \frac{2\alpha\beta}{\Delta_4}, \quad z = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{\Delta_4}, \quad t = \frac{\beta^2 + \gamma^2 + \alpha^2}{\Delta_4}, \tag{19}$$

где

$$\alpha,\beta,\gamma \in N, \quad \alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2, \quad (\alpha,\beta,\gamma) = 1, \quad \Delta_4 = \left(2\alpha, \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2\right); \tag{20}$$

$$x = \frac{2ab}{\Delta_3}, \quad y = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{\Delta_3}, \quad z = \frac{2ac}{\Delta_3}, \quad t = \frac{b^2 + c^2 + a^2}{\Delta_3}, \tag{21}$$

где

$$a,b,c \in N, \quad a^2 < b^2 + c^2, \quad (a,b,c) = 1, \quad \Delta_3 = \left(2a, b^2 + c^2 - a^2\right); \tag{22}$$

$$x = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{\Delta_4}, \quad y = \frac{2\alpha\gamma}{\Delta_4}, \quad z = \frac{2\alpha\beta}{\Delta_4}, \quad t = \frac{\beta^2 + \gamma^2 + \alpha^2}{\Delta_4}, \tag{23}$$

где

$$\alpha,\beta,\gamma \in N, \quad \alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2, \quad (\alpha,\beta,\gamma) = 1, \quad \Delta_4 = \left(2\alpha, \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2\right), \tag{24}$$

является общей формулой всех основных сервасовых параллелепипедов. При этом каждой такой основной сервасов параллелепипед определяется каждым из этих способов однозначно.

4. Пример. Один и тот же основной сервасов параллелепипед <3, 6, 2; 7> получается: из формулы (1) с условием (2) при a=5, b=3, c=1; из формулы (3) с условием (4) при $\alpha = 3, \beta = 1, \gamma = 2$; из формулы (5) с условием (6) при a=13, b=2, c=3; из формулы (7) с условием (8) при $\alpha = 3, \beta = 2, \gamma = 1$; из формулы (9) с условием (10) при a=13, b=3, c=2; из формулы (11) с условием (12) при $\alpha = 5, \beta = 1, \gamma = 3$; из формулы (13) с условием (14) при a=2, b=3, c=1; из формулы (15) с условием (16) при $\alpha = 5, \beta = 3, \gamma = 6$; из формулы (17) с условием (18) при a=1, b=2, c=3; из формулы (19) с условием (20) при $\alpha = 5, \beta = 6, \gamma = 3$; из формулы (21) с условием (22) при a=1, b=3, c=2, и из формулы (23) с условием (24) при $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 3$.

5. Наличие общих формул всех основных сервасовых параллелепипедов максимально упрощает задачу отыскания общих формул всех сервасовых параллелепипедов. Иначе говоря, из теоремы очевидным образом вытекает

Следствие. Каждая из следующих эквивалентных формул:

$$x = k\frac{a^2 - b^2 - c^2}{\Delta_1}, \quad y = k\frac{2ab}{\Delta_1}, \quad z = k\frac{2ac}{\Delta_1}, \quad t = k\frac{a^2 + b^2 + c^2}{\Delta_1}, \tag{25}$$

где

$$k,a,b,c \in N, \quad a^2 > b^2 + c^2, \quad (a,b,c) = 1, \quad \Delta_1 = \left(2a, a^2 - b^2 - c^2\right); \tag{26}$$

$$x = k\frac{2\alpha\beta}{\Delta_2}, \quad y = k\frac{2\alpha\gamma}{\Delta_2}, \quad z = k\frac{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}{\Delta_2}, \quad t = k\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\Delta_2}, \tag{27}$$

где

$$k,\alpha,\beta,\gamma \in N, \quad \alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2, \quad (\alpha,\beta,\gamma) = 1, \quad \Delta_2 = \left(2\alpha, \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2\right); \tag{28}$$

$$x = k\frac{2ac}{\Delta_1}, \quad y = k\frac{a^2 - b^2 - c^2}{\Delta_1}, \quad z = k\frac{2ab}{\Delta_1}, \quad t = k\frac{a^2 + b^2 + c^2}{\Delta_1}, \tag{29}$$

где

$$k,a,b,c \in N, \quad a^2 > b^2 + c^2, \quad (a,b,c) = 1, \quad \Delta_1 = \left(2a, a^2 - b^2 - c^2\right); \tag{30}$$

$$x = k\frac{2\alpha\gamma}{\Delta_2}, \quad y = k\frac{2\alpha\beta}{\Delta_2}, \quad z = k\frac{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}{\Delta_2}, \quad t = k\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\Delta_2}, \tag{31}$$

где

$$k,\alpha,\beta,\gamma \in N, \quad \alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2, \quad (\alpha,\beta,\gamma) = 1, \quad \Delta_2 = \left(2\alpha, \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2\right); \tag{32}$$

$$x = k\frac{2ab}{\Delta_1}, \quad y = k\frac{a^2 - b^2 - c^2}{\Delta_1}, \quad z = k\frac{2ac}{\Delta_1}, \quad t = k\frac{a^2 + b^2 + c^2}{\Delta_1}, \tag{33}$$

где

$$k,a,b,c \in N, \quad a^2 > b^2 + c^2, \quad (a,b,c) = 1, \quad \Delta_1 = \left(2a, a^2 - b^2 - c^2\right); \tag{34}$$

$$x = k\frac{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}{\Delta_2}, \quad y = k\frac{2\alpha\gamma}{\Delta_2}, \quad z = k\frac{2\alpha\beta}{\Delta_2}, \quad t = k\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\Delta_2}, \tag{35}$$

где

$$k,\alpha,\beta,\gamma \in N, \quad \alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2, \quad (\alpha,\beta,\gamma) = 1, \quad \Delta_2 = \left(2\alpha, \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2\right); \tag{36}$$

$$x = k\frac{b^2 + c^2 - a^2}{\Delta_3}, \quad y = k\frac{2ab}{\Delta_3}, \quad z = k\frac{2ac}{\Delta_3}, \quad t = k\frac{b^2 + c^2 + a^2}{\Delta_3}, \tag{37}$$

где

$$k,a,b,c \in N, \quad a^2 < b^2 + c^2, \quad (a,b,c) = 1, \quad \Delta_3 = \left(2a, b^2 + c^2 - a^2\right); \tag{38}$$

$$x = k\frac{2\alpha\beta}{\Delta_4}, \quad y = k\frac{2\alpha\gamma}{\Delta_4}, \quad z = k\frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{\Delta_4}, \quad t = k\frac{\beta^2 + \gamma^2 + \alpha^2}{\Delta_4}, \tag{39}$$

где

$$k,\alpha,\beta,\gamma \in N, \quad \alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2, \quad (\alpha,\beta,\gamma) = 1, \quad \Delta_4 = \left(2\alpha, \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2\right); \tag{40}$$

$$x = k\frac{2ac}{\Delta_3}, \quad y = k\frac{b^2 + c^2 - a^2}{\Delta_3}, \quad z = k\frac{2ab}{\Delta_3}, \quad t = k\frac{b^2 + c^2 + a^2}{\Delta_3}, \tag{41}$$

где

$$k,a,b,c \in N, \quad a^2 < b^2 + c^2, \quad (a,b,c) = 1, \quad \Delta_3 = \left(2a, b^2 + c^2 - a^2\right); \tag{42}$$

$$x = k\frac{2\alpha\gamma}{\Delta_4}, \quad y = k\frac{2\alpha\beta}{\Delta_4}, \quad z = k\frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{\Delta_4}, \quad t = k\frac{\beta^2 + \gamma^2 + \alpha^2}{\Delta_4}, \tag{43}$$

где

$$k,\alpha,\beta,\gamma \in N, \quad \alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2, \quad (\alpha,\beta,\gamma) = 1, \quad \Delta_4 = \left(2\alpha, \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2\right); \tag{44}$$

$$x = k\frac{2ab}{\Delta_3}, \quad y = k\frac{b^2 + c^2 - a^2}{\Delta_3}, \quad z = k\frac{2ac}{\Delta_3}, \quad t = k\frac{b^2 + c^2 + a^2}{\Delta_3}, \tag{45}$$

где

$$k,a,b,c \in N, \quad a^2 < b^2 + c^2, \quad (a,b,c) = 1, \quad \Delta_3 = \left(2a, b^2 + c^2 - a^2\right); \tag{46}$$

$$x = k\frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{\Delta_4}, \quad y = k\frac{2\alpha\gamma}{\Delta_4}, \quad z = k\frac{2\alpha\beta}{\Delta_4}, \quad t = k\frac{\beta^2 + \gamma^2 + \alpha^2}{\Delta_4}, \tag{47}$$

где

$$k,\alpha,\beta,\gamma \in N, \quad \alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2, \quad (\alpha,\beta,\gamma) = 1, \quad \Delta_4 = \left(2\alpha, \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2\right), \tag{48}$$

является общей формулой всех сервасовых параллелепипедов. При этом каждый такой сервасов параллелепипед $< x, y, z; t >$ определяется каждым из этих способов однозначно.

6. Из теоремы и ее следствия очевидным образом вытекает поистине чудесная гармония ребер x, y, z как основных, так и не основных сервасовых параллелепипедов $< x, y, z; t >$.

Основные сервасовы параллелепипеды $<3,6,2;7>$;$<6,2,3;7>$; $<2,3,6;7>$;$<2,6,3;7>$;$<6,3,2;7>$ и $<3,2,6;7>$ с симметричными, если можно так сказать, ребрами x, y, z получаются из одной и той

же общей формулы (1) с условием (2) соответственно при $a=5, b=3, c=1$; $a=13, b=2, c=3$; $a=3, b=1, c=2$; $a=3, b=2, c=1$; $a=13, b=3, c=2$, и $a=5, b=1, c=3$, а из одной и той же общей формулы (13) с условием (14) соответственно при $a=2, b=3, c=1$; $a=1, b=2, c=3$; $a=5, b=3, c=6$; $a=5, b=6, c=3$; $a=1, b=3, c=2$ и $a=2, b=1, c=3$.

Аналогично и сервасовы параллелепипеды $<9,18,6;21>$; $<18,6,9;21>$, $<6,9,18;21>$; $<6,18,9;21>$; $<18,9,6;21>$ и $<9,6,18;21>$ с симметричными, если можно так сказать, ребрами x, y, z получаются из одной и той же общей формулы (25) с условием (26) соответственно при $k=3, a=5, b=3, c=1$; $k=3, a=13, b=2, c=3$; $k=3, a=3, b=1, c=2$; $k=3, a=3, b=2, c=1$; $k=3, a=13, b=3, c=2$ и $k=3, a=5, b=1, c=3$, а из одной и той же общей формулы (37) с условием (38) соответственно при $k=3, a=2, b=3, c=1$; $k=3, a=1, b=2, c=3$; $k=3, a=5, b=3, c=6$; $k=3, a=5, b=6, c=3$; $k=3, a=1, b=3, c=2$ и $k=3, a=2, b=1, c=3$.

7. Отметим, что если x, y, z -ребра, а t - диагональю сервасова параллелепипеда, то, как известно,

$$x^2+y^2+z^2=t^2, \tag{49}$$

где

$$x, y, z, t \in N. \tag{50}$$

Обратно, если x, y, z, t удовлетворяют сервасову уравнению (49) с условием (50), то, числа x, y, z являются ребрами, а t - диагональ сервасова параллелепипеда. Таким образом, отыскание всех сервасовых параллелепипедов сводится к решению сервасова уравнения (49) с условием (50).

Сервасово уравнение (49) с условием (50) издавно привлекало внимание математиков [1, 2, 5-14]. Исследованием этого уравнения занимались Ибн ал-Хусайн, В.Горцковский, Л.Е. Диксон, В.Серпинский, Ф.Стайгер и другие.

Но наибольший интерес представляют работы Ибн ал-Хусейна и В.Серпинского.

В X веке Ибн ал-Хусайн нашел для сервасова уравнения (49) с условием (50) следующие формулы: $x=a^2-b^2-c^2, y=2ab, z=2ac, t=a^2+b^2+c^2$. [14]

В середине XX века В.Серпинский доказал и сформулировал следующую теорему [2]: «Все решения x, y, z, t уравнения $x^2+y^2+z^2=t^2$ в натуральных числах, где y и z четны, получаются из формул

$$x=\frac{l^2+m^2-n^2}{n}; \qquad y=2l; \qquad z=2m; \qquad t=\frac{l^2+m^2+n^2}{n},$$

причем за l и m следует взять все пары чисел, а за n все делители суммы l^2+m^2, причем $n<\sqrt{l^2+m^2}$. Каждое решение таким способом получится только один раз».

Отметим также, что при отыскании общей формулы всех без исключения сервасовых параллелепипедов возникают известные трудности. Преодолеть эти трудности и параметризовать множество всех основных (а следовательно, и всех) сервасовых параллелепипедов алгебраическим образом, насколько нам известно, не удается. Использование же арифметической функции, точнее, простейшей арифметической функции, введенной автором этих строк, позволяет не только избежать этих трудностей, но и весьма просто найти такую общую формулу (теорема и ее следствие).

И теперь становится совершенно очевидным, какую роль в формулах, дающих все натуральные решения сервасова уравнения (49), играют арифметические функции, в частности, простейшие арифметические функции $\left(2a, a^2-b^2-c^2\right), \left(2a, b^2+c^2-a^2\right)$.

8. Доказательство теоремы. Воспользуемся методом автора этих строк. Пусть $<x,y,z;t>$ - любой основной сервасов параллелепипед. Тогда, как известно, имеет место (49) с условием (50).

Нетрудно заметить, что $t>\max(x,y,z)$. Пусть

$$x=ak-t,\qquad y=bk,\qquad z=ck, \tag{51}$$

где

$$k,a,b,c\in N,\qquad a^2>b^2+c^2,\qquad (a,b,c)=1, \tag{52}$$

Тогда будем иметь $(ak-t)^2+(bk)^2+(ck)^2=t^2$. Откуда

$$t=k\frac{a^2+b^2+c^2}{2a}, \tag{53}$$

где

$$k,a,b,c\in N,\qquad a^2>b^2+c^2,\qquad (a,b,c)=1. \tag{54}$$

Положим, что

$$k=\frac{2a}{\Delta_1}, \tag{55}$$

где

$$a,b,c\in N,\qquad a^2>b^2+c^2,\qquad \Delta_1=\left(2a,a^2-b^2-c^2\right). \tag{56}$$

Тогда из (53) с условием (54) и из (51) с условием (52) в силу (55) с условием (56) получаем (1) с условием (2).

Так как значения x,y,z,t из формулы (1) действительно удовлетворяют уравнению (49) с условием (50) и $(a,b,c)=1,(x,y,z,t)=1$, то каждый основной сервасов параллелепипед x,y,z,t определяется этим способом однозначно. Этим первая часть теоремы доказана.

Схема доказательства эквивалентности формул (1)-(23) (нечетные номера) такова: $(1)\Rightarrow(3)\Rightarrow(5)\Rightarrow\ldots\Rightarrow(21)\Rightarrow(23)\Rightarrow(1)$. Пусть в (1)

$$a=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta}{\left(2\alpha(\gamma,\alpha+\beta),\alpha^2-\beta^2-\gamma^2\right)},\quad b=\frac{2\alpha\gamma}{\left(2\alpha(\gamma,\alpha+\beta),\alpha^2-\beta^2-\gamma^2\right)},$$

$$c=\frac{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}{\left(2\alpha(\gamma,\alpha+\beta),\alpha^2-\beta^2-\gamma^2\right)},$$

где $\alpha,\beta,\gamma\in N,\alpha^2>\beta^2+\gamma^2,(\alpha,\beta,\gamma)=1$. Тогда из формулы (1) следует формула (3). Здесь и в дальнейшем очевидные преобразования опускаем. Формула (5) следует из формулы (3) при

$$\alpha=\frac{a^2+b^2+c^2+2ab}{\left(2a(c,a+b),a^2-b^2-c^2\right)},\quad \beta=\frac{2ac}{\left(2a(c,a+b),a^2-b^2-c^2\right)},$$

$$\gamma=\frac{a^2-b^2-c^2}{\left(2a(c,a+b),a^2-b^2-c^2\right)},$$

где $a,b,c\in N,a^2>b^2+c^2,(a,b,c)=1$. Формула (7) следует из формулы (5) при

$$a=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta}{\left(2\alpha\left(\gamma,\alpha+\beta\right),\alpha^2-\beta^2-\gamma^2\right)},\quad b=\frac{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}{\left(2\alpha\left(\gamma,\alpha+\beta\right),\alpha^2-\beta^2-\gamma^2\right)},$$

$$c=\frac{2\alpha\gamma}{\left(2\alpha\left(\gamma,\alpha+\beta\right),\alpha^2-\beta^2-\gamma^2\right)},$$

где $\alpha,\beta,\gamma\in N,\alpha^2>\beta^2+\gamma^2,\left(\alpha,\beta,\gamma\right)=1$. Формула (9) следует из формулы (7) при

$$\alpha=\frac{a^2+b^2+c^2+2ac}{\left(2a\left(b,a+c\right),a^2-b^2-c^2\right)},\quad \beta=\frac{a^2-b^2-c^2}{\left(2a\left(b,a+c\right),a^2-b^2-c^2\right)},$$

$$\gamma=\frac{2ab}{\left(2a\left(b,a+c\right),a^2-b^2-c^2\right)},$$

где $a,b,c\in N,a^2>b^2+c^2,\left(a,b,c\right)=1$. Формула (11) следует из формулы (9) при

$$a=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\gamma}{\left(2\alpha\left(\beta,\alpha+\gamma\right),\alpha^2-\beta^2-\gamma^2\right)},\quad b=\frac{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}{\left(2\alpha\left(\beta,\alpha+\gamma\right),\alpha^2-\beta^2-\gamma^2\right)},$$

$$c=\frac{2\alpha\beta}{\left(2\alpha\left(\beta,\alpha+\gamma\right),\alpha^2-\beta^2-\gamma^2\right)},$$

где $\alpha,\beta,\gamma\in N,\alpha^2>\beta^2+\gamma^2,\left(\alpha,\beta,\gamma\right)=1$. Формула (13) следует из формулы (11) при

$$\alpha=\frac{b^2+c^2}{\left(a\left(b,c\right),b^2+c^2\right)},\quad \beta=\frac{ac}{\left(a\left(b,c\right),b^2+c^2\right)},\quad \gamma=\frac{ab}{\left(a\left(b,c\right),b^2+c^2\right)},$$

где $a,b,c\in N,a^2<b^2+c^2,\left(a,b,c\right)=1$. Формула (15) следует из формулы (13) при

$$a=\frac{\beta^2+\gamma^2+\alpha^2-2\alpha\beta}{\left(2\alpha\left(\gamma,\alpha-\beta\right),\beta^2+\gamma^2-\alpha^2\right)},\quad b=\frac{2\alpha\gamma}{\left(2\alpha\left(\gamma,\alpha+\beta\right),\beta^2+\gamma^2-\alpha^2\right)},$$

$$c=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{\left(2\alpha\left(\gamma,\alpha-\beta\right),\beta^2+\gamma^2-\alpha^2\right)},$$

где $\alpha,\beta,\gamma\in N,\alpha^2<\beta^2+\gamma^2,\left(\alpha,\beta,\gamma\right)=1$. Формула (17) следует из формулы (15) при

$$\alpha=\frac{b^2+c^2+a^2-2ab}{\left(2a\left(c,a-b\right),b^2+c^2-a^2\right)},\quad \beta=\frac{2ac}{\left(2a\left(c,a-b\right),b^2+c^2-a^2\right)},$$

$$\gamma=\frac{b^2+c^2-a^2}{\left(2a\left(c,a-b\right),b^2+c^2-a^2\right)},$$

где $a,b,c\in N,a^2<b^2+c^2,\left(a,b,c\right)=1$. Формула (19) следует из формулы (17) при

$$a=\frac{\beta^2+\gamma^2+\alpha^2-2\alpha\beta}{\left(2\alpha\left(\gamma,\alpha-\beta\right),\beta^2+\gamma^2-\alpha^2\right)},\quad b=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{\left(2\alpha\left(\gamma,\alpha-\beta\right),\beta^2+\gamma^2-\alpha^2\right)},$$

$$c=\frac{2\alpha\beta}{\left(2\alpha\left(\gamma,\alpha-\beta\right),\beta^2+\gamma^2-\alpha^2\right)},$$

где $\alpha,\beta,\gamma \in N, \alpha^2 < \beta^2+\gamma^2, (\alpha,\beta,\gamma)=1$. Формула (21) следует из формулы (19) при

$$\alpha = \frac{b^2+c^2+a^2-2ac}{\left(2a(c,a-b),b^2+c^2-a^2\right)}, \quad \beta = \frac{b^2+c^2-a^2}{\left(2a(b,a-c),b^2+c^2-a^2\right)},$$

$$\gamma = \frac{2ab}{\left(2a(b,a-c),b^2+c^2-a^2\right)},$$

где $a,b,c \in N, a^2 < b^2+c^2, (a,b,c)=1$. Формула (23) следует из формулы (21) при

$$a = \frac{\beta^2+\gamma^2+\alpha^2-2\alpha\beta}{\left(2\alpha(\beta,\alpha-\gamma),\beta^2+\gamma^2-\alpha^2\right)}, \quad b = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{\left(2\alpha(\beta,\alpha-\gamma),\beta^2+\gamma^2-\alpha^2\right)},$$

$$c = \frac{2\alpha\beta}{\left(2\alpha(\beta,\alpha-\gamma),\beta^2+\gamma^2-\alpha^2\right)},$$

где $\alpha,\beta,\gamma \in N, \alpha^2 < \beta^2+\gamma^2, (\alpha,\beta,\gamma)=1$. Формула (1) следует из формулы (23) при

$$\alpha = \frac{b^2+c^2}{\left(a(b,c),b^2+c^2\right)}, \quad \beta = \frac{ac}{\left(a(b,c),b^2+c^2\right)}, \quad \gamma = \frac{ab}{\left(a(b,c),b^2+c^2\right)},$$

где $a,b,c \in N, a^2 > b^2+c^2, (a,b,c)=1$. Таким образом, при выполнении условий (2)-(24) (четные номера) общие формулы (1)-(23) (нечетные номера) всех основных сервасовых параллелепипедов эквивалентны. Теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кожегельдинов С.Ш.* Некоторые элементы теории диофантовых уравнений в упражнениях и задачах. М.: Прометей, 1993. 48 с.

2. *Серпинский В.* Пифагоровы треугольники. М.: Учпедгиз, 1959. 112 с.

3. *Кожегельдинов С.Ш.* Отыскание основных героновых треугольников (ГТ) // Изв. АН РК. Серия физико-математическая. 1992. № 3. С. 48-51.

4. *Кожегельдинов С.Ш.* Об основных героновых треугольниках // Математические заметки. 1994. Т. 55, № 2. С. 72-79.

5. *Dickson L.E.* History of the Theory of Numbers. New York, 1934. V. 2.

6. *Steiger F.* Uber die Grundlosungen der Gleichung $a^2+b^2+c^2=d^2$ / Elem. Math. J. 11(5). 1956. S. 105-108.

7. *Steiger F.* Uber die Grundlosungen der Gleichung $a^2+b^2+c^2=d^2$ / MNU. 1957-1958. Bd/10. N 1-3. S. 83-86.

8. *Gorzkowski W.* On the equation $x_0^2+x_1^2+\ldots+x_n^2=x_{n+1}^k$ // Rosniki polskiego towazystwa matematycznego, Seria 1: Prage matematyczne XI (1966). P. 75-79.

9. *Кожегельдинов С.Ш.* Двухтысячелетний барьер взят. Избранные статьи и доклады. Научное издание. Алматы, 2001. 345 с.

10. *Кожегельдинов С.Ш.* Некоторые классические диофантовы уравнения от трех и более переменных. Новосибирск, 2002. Т. 1. 72 с.; Алматы, 2004. Т. 2. 176 с.; Алматы, 2006. Т. 3. 244 с.; - Семей, 2008. Т. 4. 100 с.

11. *Кожегельдинов С.Ш.* О сервасовых параллелепипедах // Вестник ВКТУ им. Д. Серикбаева, Усть-Каменогорск, 2000. № 2. С. 93-104.

12. *Габович Я.* Частные решения уравнения $x^2+y^2+z^2=t^2$ // Ученые записки ТГУ: Труды по математике и механике. Тарту, 1975. С. 20-26.

13. *Miksa F.* Table of integral solutions of $a^2+b^2+c^2=r^2$ // Math. Teacher. 1955. 48. N 4. 251-255.

15. *Башмакова И.Г., Славутин Е.И.* История диофантова анализа от Диофантова до Ферма. М.: Наука, 1984. 256 с.

УДК 511

Семипалатинский государственный педагогический институт

Поступила 10.11.08г.