С. Ш. КОЖЕГЕЛЬДИНОВ

ОБ ОСНОВНЫХ РЕШЕНИЯХ ДИОФАНТОВОЙ СИСТЕМЫ

Рассматривается следующая система диофантовых уравнений

$$\begin{cases} u^3 + w^2 = t^2, \\ v^3 + w^2 = u^3, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$u, v, w, t \in N. \tag{2}$$

Решение $< u; v; w; t >$ системы (1) с условием (2) называется основным, если выполняется условие $\left(u^3, v^2, w^2, t^2\right)_{\deg 6} = 1$. Например, решение <145; 145; 1740; 2465> является основным, так как $\left(145^3, 145^2, 1740^2, 2465^2\right)_{\deg 6} = 1$.

Теорема. Каждая из следующих эквивалентных формул:

$$u = \frac{\left(\alpha^2 + \beta^2\right)\left(\alpha^2 - 4\alpha\beta + 5\beta^2\right)}{\Delta_1^2}, \quad v = \frac{u\left(\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2\right)}{\Delta_1},$$
$$w = \frac{u\left(2\alpha\beta - 2\beta^2\right)}{\Delta_1}, \qquad t = \frac{u\left(\alpha^2 - 2\alpha\beta + 3\beta^2\right)}{\Delta_1}, \tag{3}$$

где

$$\alpha, \beta \in N, (\alpha, \beta) = 1, \alpha > \beta, 2\alpha^2 > (\alpha + \beta)^2, \Delta_2 = \left(\left(\alpha^2 + \beta^2\right)\left(\alpha^2 - 4\alpha\beta + 5\beta^2\right)(2, \alpha - \beta)\right)_{\deg 3}; \tag{4}$$

$$u = \frac{\left(\gamma^2 + \delta^2\right)\left(\gamma^2 - 4\gamma\delta + 5\delta^2\right)}{\Delta_2^2}, \quad v = \frac{u\left(\delta^2 + 2\gamma\delta - \gamma^2\right)}{\Delta_2},$$
$$w = \frac{u\left(2\gamma\delta - 2\delta^2\right)}{\Delta_2}, \qquad t = \frac{u\left(\gamma^2 - 2\gamma\delta + 3\delta^2\right)}{\Delta_2}, \tag{5}$$

где

$$\gamma, \delta \in N, (\gamma, \delta) = 1, \gamma > \delta, (\gamma + \delta)^2 > 2\gamma^2, \Delta_2 = \left(\left(\gamma^2 + \delta^2\right)\left(\gamma^2 - 4\gamma\delta + 5\delta^2\right)(2, \gamma - \delta)\right)_{\deg 3}; \tag{6}$$

$$u = \frac{\Delta^4 + 4\beta^4}{\Delta_1^2}, v = \frac{u\left(2\beta^2 - \Delta^2\right)}{\Delta_1}, w = \frac{u(2\beta\Delta)}{\Delta_1}, t = \frac{u\left(2\beta^2 + \Delta^2\right)}{\Delta_1}, \tag{7}$$

где

$$\alpha, \beta \in N, \Delta = (2\alpha)_{\deg 2}, \Delta^2 < 2\beta^2, (\alpha, \beta) = 1, \Delta_1 = \left(\left(\Delta^4 + 4\beta^4\right)(2, \Delta)\right)_{\deg 3}, \tag{8}$$

α - удвоенный квадрат или нечетный квадрат;

$$u=\frac{\left(5\gamma^2-24\gamma\delta+29\delta^2\right)\left(\gamma^2-4\gamma\delta+5\delta^2\right)}{\Delta_2^2},\qquad v=\frac{u\left(\delta^2+2\gamma\delta-\gamma^2\right)}{\Delta_2},$$
$$w=\frac{u\left(10\gamma\delta-2\gamma^2-12\delta^2\right)}{\Delta_2},\qquad t=\frac{u\left(3\gamma^2-14\gamma\delta+17\delta^2\right)}{\Delta_2}, \tag{9}$$

где

$$\gamma,\delta\in N,(\gamma,\delta)=1,2\delta<\gamma<3\delta,2\gamma^2<(\gamma+\delta)^2,$$
$$\Delta_2=\left(\left(5\gamma^2-24\gamma\delta+29\delta^2\right)\left(\gamma^2-4\gamma\delta+5\delta^2\right)(2,\gamma-\delta)\right)_{\deg 3}; \tag{10}$$

$$u=\frac{\left(5\alpha^2-24\alpha\beta+29\beta^2\right)\left(\alpha^2-4\alpha\beta+5\beta^2\right)}{\Delta_1^2},\qquad v=\frac{u\left(\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2\right)}{\Delta_1},$$
$$w=\frac{u\left(10\alpha\beta-2\alpha^2-12\beta^2\right)}{\Delta_1},\qquad t=\frac{u\left(3\alpha^2-14\alpha\beta+17\beta^2\right)}{\Delta_1}, \tag{11}$$

где

$$\alpha,\beta\in N,(\alpha,\beta)=1,2\beta<\alpha<3\beta,2\alpha^2>(\alpha+\beta)^2,$$
$$\Delta_2=\left(\left(5\alpha^2-24\alpha\beta+29\beta^2\right)\left(\alpha^2-4\alpha\beta+5\beta^2\right)(2,\alpha-\beta)\right)_{\deg 3}; \tag{12}$$

$$u=\frac{\Delta^4+4\delta^4}{\Delta_2^2},v=\frac{u\left(\Delta^2-2\delta^2\right)}{\Delta_2},w=\frac{u(2\delta\Delta)}{\Delta_2},t=\frac{u\left(\Delta^2+2\delta^2\right)}{\Delta_2}, \tag{13}$$

где

$$\gamma,\delta\in N,\Delta=(2\gamma)_{\deg 2},2\delta^2<\Delta^2,(\gamma,\delta)=1,\Delta_2=\left(\left(\Delta^4+4\delta^4\right)(2,\Delta)\right)_{\deg 3}, \tag{14}$$

γ - удвоенный квадрат или нечетный квадрат;

$$u=\frac{\alpha^4+4\beta^4}{\Delta_1^2},v=\frac{u\left(\alpha^2-2\beta^2\right)}{\Delta_1},w=\frac{u(2\alpha\beta)}{\Delta_1},t=\frac{u\left(\alpha^2+2\beta^2\right)}{\Delta_1}, \tag{15}$$

где

$$\alpha,\beta\in N,(\alpha,\beta)=1,\alpha^2>2\beta^2,\Delta_1=\left(\left(\alpha^4+4\beta^4\right)(2,\alpha)\right)_{\deg 3}; \tag{16}$$

$$u=\frac{4\delta^4+\gamma^4}{\Delta_2^2},v=\frac{u\left(2\delta^2-\gamma^2\right)}{\Delta_2},w=\frac{u(2\gamma\delta)}{\Delta_2},t=\frac{u\left(2\delta^2+\gamma^2\right)}{\Delta_2}, \tag{17}$$

где

$$\gamma,\delta\in N,(\gamma,\delta)=1,2\delta^2>\gamma^2,\Delta_2=\left(\left(4\delta^4+\gamma^4\right)(2,\gamma)\right)_{\deg 3}; \tag{18}$$

$$u=\frac{\left(5\Delta^2-14\beta\Delta+10\beta^2\right)\left(\Delta^2-2\beta\Delta+2\beta^2\right)}{\Delta_1^2},\qquad v=\frac{u\left(\Delta^2-2\beta^2\right)}{\Delta_1},$$
$$w=\frac{u\left(6\beta\Delta-2\Delta^2-4\beta^2\right)}{\Delta_1},\qquad t=\frac{u\left(3\Delta^2-8\beta\Delta+6\beta^2\right)}{\Delta_1},\tag{19}$$

где

$$\alpha,\beta\in N,\Delta=\left(2\alpha\right)_{\deg 2},\beta<\Delta<2\beta,2\beta^2<\Delta^2,\left(\alpha,\beta\right)=1,$$

α - удвоенный квадрат или нечетный квадрат, (20)

$$\Delta_1=\left(\left(5\Delta^2-14\beta\Delta+10\beta^2\right)\left(\Delta^2-2\beta\Delta+2\beta^2\right)\left(2,\Delta\right)\right)_{\deg 3};$$

$$u=\frac{\left(5\gamma^2-14\gamma\delta+10\delta^2\right)\left(\gamma^2-2\gamma\delta+2\delta^2\right)}{\Delta_2^2},\qquad v=\frac{u\left(2\delta^2-\gamma^2\right)}{\Delta_2},$$
$$w=\frac{u\left(6\gamma\delta-2\gamma^2-4\delta^2\right)}{\Delta_2},\qquad t=\frac{u\left(3\gamma^2-8\gamma\delta+6\delta^2\right)}{\Delta_2},\tag{21}$$

где

$$\gamma,\delta\in N,\left(\gamma,\delta\right)=1,\delta<\gamma<2\delta,\gamma<2\delta^2,\Delta_2=\left(\left(5\gamma^2-14\gamma\delta^2+10\delta^2\right)\left(\gamma^2-2\gamma\delta+2\delta^2\right)\left(2,\gamma\right)\right)_{\deg 3};\tag{22}$$

$$u=\frac{\left(5\alpha^2-14\alpha\beta+10\beta^2\right)\left(\alpha^2-2\alpha\beta+2\beta^2\right)}{\Delta_1^2},\qquad v=\frac{u\left(\alpha^2-2\beta^2\right)}{\Delta_1},$$
$$w=\frac{u\left(6\alpha\beta-2\alpha^2-4\beta^2\right)}{\Delta_1},\qquad t=\frac{u\left(3\alpha^2-8\alpha\beta+6\beta^2\right)}{\Delta_1},\tag{23}$$

где

$$\alpha,\beta\in N,\left(\alpha,\beta\right)=1,\beta<\alpha<2\beta,\alpha^2>2\beta^2,$$
$$\Delta_1=\left(\left(5\alpha^2-14\alpha\beta+10\beta^2\right)\left(\alpha^2-2\alpha\beta+2\beta^2\right)\left(2,\alpha\right)\right)_{\deg 3};\tag{24}$$

$$u=\frac{\left(5\Delta^2-14\delta\Delta+10\delta^2\right)\left(\Delta^2-2\delta\Delta+2\delta^2\right)}{\Delta_2^2},\qquad v=\frac{u\left(2\delta^2-\Delta^2\right)}{\Delta_2},$$
$$w=\frac{u\left(6\delta\Delta-2\Delta^2-4\delta^2\right)}{\Delta_2},\qquad t=\frac{u\left(3\Delta^2-8\delta\Delta+6\delta^2\right)}{\Delta_2},\tag{25}$$

где

$$\gamma,\delta\in N,\Delta=\left(2\gamma\right)_{\deg 2},\delta<\gamma<2\delta,\Delta^2<2\delta^2,\left(\gamma,\delta\right)=1,$$

γ - удвоенный квадрат или нечетный квадрат, (26)

$$\Delta_2=\left(\left(5\Delta^2-14\delta\Delta+10\delta^2\right)\left(\Delta^2-2\delta\Delta+2\delta^2\right)\left(2,\Delta\right)\right)_{\deg 3},$$

является общей формулой всех основных решений системы диофантовых уравнений (1) с условием (2). При этом каждое такое решение определяется каждым из этих способов однозначно.

Здесь и в дальнейшем для удобства совокупность формул вида (3) называется формулой. Для отыскания всех основных решений системы (1) с условием (2) в дальнейшем без специального напоминания используются идеи, методы и результаты работ [1-8].

Доказательство теоремы. Положим, что

$$u=\frac{s}{\Delta_1^2}, v=\frac{s(2,\alpha-\beta)}{\Delta_1^3}s_1, w=\frac{s(2,\alpha-\beta)}{\Delta_1^3}s_2, t=\frac{s(2,\alpha-\beta)}{\Delta_1^3}s_3, \tag{27}$$

где

$$\alpha,\beta\in N,(\alpha,\beta)=1,\alpha>\beta,\Delta_1=\left(\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\alpha^2-4\alpha\beta+5\beta^2\right)(2,\alpha-\beta)\right)_{\deg 3},$$

$$s_1,s_2,s_3,s\in N,(s_1,s_2,s_3)=1.$$

Тогда из системы (1) получаем, что

$$\begin{cases} s=(2,\alpha-\beta)^2\left(s_3^2-s_2^2\right), \\ s=(2,\alpha-\beta)^2\left(s_1^2-s_2^2\right), \end{cases} \tag{28}$$

откуда

$$s_1^2+2s_2^2=s_3^2, \tag{29}$$

где

$$s_1,s_2,s_3\in N,(s_1,s_2,s_3)=1. \tag{30}$$

Для гельфондова уравнения (29) с условием (30) из [5, с.109] имеем, что

$$s_1=\frac{\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2}{(2,\alpha-\beta)}, s_2=\frac{2\alpha\beta-2\beta^2}{(2,\alpha-\beta)}, s_3=\frac{\alpha^2-2\alpha\beta+3\beta^2}{(2,\alpha-\beta)}, \tag{31}$$

где

$$\alpha,\beta\in N,(\alpha,\beta)=1,\alpha>\beta,2\alpha^2>(\alpha+\beta)^2. \tag{32}$$

Из (28) и (31) с условием (32) имеем, что $s=\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\alpha^2-4\alpha\beta+5\beta^2\right)$, где $\alpha,\beta\in N,(\alpha,\beta)=1,\alpha>\beta$. Поэтому, а также в силу (27) и (31) получаем формулу (3) с условием (2).

Без особого труда можно убедиться в том, что значения u,v,w,t из формулы (3) с условием (4) действительно удовлетворяют системе (1) с условием (2). При этом нетрудно заметить, что $\left(u^3,v^2,w^2,t^2\right)_{\deg 6}=1$. И так как $(\alpha,\beta)=1$, то каждое решение $<u;v;w;t>$ системы (1) с условием (2) определяется этим способом однозначно. Этим первая часть теоремы доказана.

Теперь докажем эквивалентность формул (3)-(25) (нечетные номера). Схема доказательства такова: $(3)\Rightarrow(5)\Rightarrow(7)\Rightarrow\ldots\Rightarrow(21)\Rightarrow(23)\Rightarrow(25)\Rightarrow 3$. При доказательстве очевидные преобразования опускаем. Формула (5) следует из формулы (3) при

$$\alpha=\frac{\gamma+\delta}{(2,\gamma-\delta)}, \beta=\frac{\gamma-\delta}{(2,\gamma-\delta)},$$

где $\gamma,\delta \in N,(\gamma,\delta)=1,\gamma>\delta$. Формула (7) следует из формулы (5) при $\gamma=\Delta+\beta,\delta=\beta$, где $\alpha,\beta \in N,\Delta=(2\alpha)_{dtg2},\Delta^2<2\beta^2,(\alpha,\beta)=1$, α - удвоенный квадрат или нечетный квадрат. Формула (9) следует из формулы (7) при

$$\alpha=\frac{2(\gamma-2\delta)^2}{(2,\gamma-\delta)},\beta=\frac{3\delta-\gamma}{(2,\gamma-\delta)},$$

где $\gamma,\delta \in N,(\gamma,\delta)=1,2\delta<\gamma<3\delta$. Формула (11) следует из формулы (9) при

$$\gamma=\frac{\alpha+\beta}{(2,\alpha-\beta)},\delta=\frac{\alpha-\beta}{(2,\alpha-\beta)},$$

где $\alpha,\beta \in N,(\alpha,\beta)=1,2\beta<\alpha<3\beta$. Формула (13) следует из формулы (11) при

$$\alpha=\frac{3\Delta+4\delta}{(2,\Delta)},\beta=\frac{\Delta+2\delta}{(2,\Delta)},$$

где $\gamma,\delta \in N,\Delta=(2\gamma)_{\deg 2},(\gamma,\delta)=1$, γ - удвоенный квадрат или нечетный квадрат. Формула (15) следует из формулы (13) при

$$\gamma=\frac{\alpha^2}{(2,\alpha)},\qquad \delta=\beta,$$

где $\alpha,\beta \in N,(\alpha,\beta)=1$. Формула (17) следует из формулы (15) при

$$\alpha=\frac{2\delta}{(2,\gamma)},\qquad \beta=\frac{\gamma}{(2,\gamma)},$$

где $\gamma,\delta \in N,(\gamma,\delta)=1$. Формула (19) следует из формулы (17) при $\gamma=2\beta-\Delta,\delta=\Delta-\beta$, где $\alpha,\beta \in N,\Delta=(2\alpha)_{\deg 2},\beta<\Delta<2\beta,(\alpha,\beta)=1$, α - удвоенный квадрат или нечетный квадрат. Формула (21) следует из формулы (19) при

$$\alpha=\frac{2\delta^2}{(2,\gamma)},\qquad \beta=\frac{\gamma}{(2,\gamma)},$$

где $\gamma,\delta \in N,(\gamma,\delta)=1,\delta<\gamma<2\delta$. Формула (23) следует из формулы (21) при

$$\gamma=\frac{2\beta}{(2,\alpha)},\qquad \delta=\frac{\alpha}{(2,\alpha)},$$

где $\alpha,\beta \in N,(\alpha,\beta)=1,\quad \beta<\alpha<2\beta$. Формула (25) следует из формулы (23) при

$$\alpha=\frac{2\delta}{(2,\Delta)},\qquad \beta=\frac{\Delta}{(2,\Delta)},$$

где $\gamma,\delta \in N,\Delta=(2\gamma)_{\deg 2},\delta<\Delta<2\delta,(\gamma,\delta)=1$, γ - удвоенный квадрат или нечетный квадрат.