Ш. Н. КУТТЫКОЖАЕВА

ε-АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЙ СВОБОДНЫХ КОНВЕКЦИЙ С УЧЕТОМ ПЕРЕМЕННЫХ ФУНКЦИИ ТОКА И ВИХРЯ СКОРОСТЕЙ

Движение вязкой несжимаемой жидкости в переменных функции тока и вихря скоростей с учетом температур сводится к решению уравнения [1]:

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t}+\psi_y\omega_x-\psi_x\omega_y=\mu\Delta\omega+\gamma\theta_y,$$

$$\omega=\Delta\psi;\quad \frac{\partial\theta}{\partial t}+\psi_y\frac{\partial\theta}{\partial x}-\psi_x\frac{\partial\theta}{\partial y}=\lambda\Delta\theta, \quad (1)$$

$$\theta\big|_{t=0}=\theta_0(x)\qquad \omega\big|_{t=0}=\omega_0(x),\quad \frac{\partial\theta}{\partial t}\bigg|_S=0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}\bigg|_S=\psi\big|_S=0,\quad t\in[0,T]. \quad (2)$$

Здесь μ – коэффициент вязкости, Ω – область в R^3, S – граница области Ω, ψ – функция тока, f – массовая сила, $0<\gamma=\text{const}$.

Система уравнений (1), (2) является системой составного типа, поэтому непосредственное применение метода расщепления затруднительно. И для приближенного решения задачи (1), (2) методом дробных шагов рассмотрим систему уравнений с малым параметром:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+Q_m\right)+\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}+\psi_y^\varepsilon\omega_x^\varepsilon-\psi_x^\varepsilon\omega_y^\varepsilon=$$

$$=\Delta\omega^\varepsilon+\gamma\theta_y^\varepsilon,\ \omega^\varepsilon=\Delta\psi^\varepsilon,$$

$$\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial t}+\psi_y^\varepsilon\theta_x^\varepsilon-\psi_x^\varepsilon\theta_y^\varepsilon=\lambda\Delta\theta^\varepsilon, \quad (3)$$

$$\theta^\varepsilon\big|_{t=0}=\theta_0(x)$$

$$\psi^\varepsilon\big|_{t=0}=\psi_0(x),\quad \frac{\partial\psi^\varepsilon}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi_1(x), \quad (4)$$

$$\frac{\partial\psi^\varepsilon}{\partial n}\bigg|_S=\psi^\varepsilon\big|_{S_0}=0,\quad \frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial t}\bigg|_S=0,\quad t\in[0,T],$$

где $\psi_0(x)=\psi\big|_{t=0}$, $\psi_1(x)=\frac{\partial\psi}{\partial t}\Big|_{t=0}$ находятся из системы (1), (2). $Q_m(x)$ – функция известная, обеспечивающая условия

$$\frac{\partial^k\psi^\varepsilon}{\partial t^k}\bigg|_{t=0}=\frac{\partial^k\psi}{\partial t^k}\bigg|_{t=0},\quad \frac{\partial^k\theta^\varepsilon}{\partial t^k}\bigg|_{t=0}=\frac{\partial^k\theta}{\partial t^k}\bigg|_{t=0}. \quad (5)$$

Дальнейшие обозначения взяты из работы [2].

Определение 1. Обобщенным решением задачи (3), (4) называются функции $\psi^\varepsilon(x,t)$, $\theta^\varepsilon(x,t)$:

$$\psi^\varepsilon\in L_2(0,T,\overset{0}{W}{}_2^2(\Omega)),\qquad \psi_t^\varepsilon\in L_2(0,T,L_2(\Omega)),$$

$\theta^\varepsilon\in L_2(0,T,\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))$, удовлетворяющие следующим интегральным тождествам:

$$\varepsilon\int_0^T\Big[\left(\psi_t^\varepsilon,\Phi_t\right)_{L_2(\Omega)}+\left(\psi_y^\varepsilon\cdot\psi^\varepsilon,\Phi_x\right)_{L_2(\Omega)}-$$

$$-\left(\psi_x^\varepsilon\cdot\Delta\psi^\varepsilon,\Phi_y\right)_{L_2(\Omega)}\Big]dt-\mu\int_0^T\left(\Delta\psi^\varepsilon,\Delta\Phi\right)_{L_2(\Omega)}dt=$$

$$=\varepsilon\int_0^T\left(Q_m\Phi\right)_{L_2(\Omega)}dt-\gamma\int_0^T\left(\theta_y^\varepsilon,\Phi\right)_{L_2(\Omega)}dt-$$

$$-\varepsilon\left(\psi_1(x),\Phi(0)\right)_{L_2(\Omega)},$$

$$\varepsilon\int_0^T\left(\theta^\varepsilon,\varphi_t\right)_{L_2(\Omega)}dt+\int_0^T\left(\theta^\varepsilon\psi_y^\varepsilon\varphi_x-\theta^\varepsilon\psi_x\varphi_y\right)_{L_2(\Omega)}dt=$$

$$=\lambda\int_0^T\left(\nabla\theta^\varepsilon,\nabla\varphi\right)_{L_2(\Omega)}dt-\left(\theta_0(x),\varphi(0)\right)_{L_2(\Omega)}. \quad (6)$$

Теорема 1. *Пусть* $\psi_0(x)\in W_2^2(\Omega)$, $\psi_1(x)\in W_2^1(\Omega)$, $\theta_0(x)\in L_2(\Omega)$. Тогда существует хотя бы одно обобщенное решение задачи (3), (4) и имеет место

$$\varepsilon\left\|\psi_t^\varepsilon\right\|_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))}+\left\|\psi^\varepsilon\right\|^2_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))}+$$

$$+\left\|\theta^\varepsilon\right\|_{L_2(0,T;\hat{W}_2^1(\Omega))}\le C<\infty.$$

Оно сходится к обобщенному решению задачи (1), (2) при $\varepsilon\to 0$.

Доказательство. Рассмотрим эквивалентную форму (6):

$$\int_0^T\left(\theta_t^\varepsilon,\varphi\right)_\Omega dt+\lambda\int_0^T\left(\nabla\theta^\varepsilon,\nabla\varphi\right)_\Omega dt=$$

$$=\int_0^T\left(\theta^\varepsilon,\psi_y^\varepsilon\varphi_x-\psi_x^\varepsilon\varphi_y\right)_\Omega dt,$$

при $\varphi = \theta^{\varepsilon}$: $\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\left\|\theta^{\varepsilon}\right\|^2 dt + \lambda\left\|\nabla\theta^{\varepsilon}\right\|^2_{L_2(Q)} =$

$$= \int_0^T (\theta^{\varepsilon}, \psi_y^{\varepsilon}\theta_x^{\varepsilon} - \psi_x^{\varepsilon}\theta_y^{\varepsilon})_{\Omega} dt.$$

Для правой части справедливо тождество

$$\int_0^T\int_{\Omega} (\theta^{\varepsilon}, \psi_y^{\varepsilon}\theta_x^{\varepsilon} - \psi_x^{\varepsilon}\theta_y^{\varepsilon}) d\xi dt = 0.$$

Тогда получим

$$\left\|\theta^{\varepsilon}(T,x)\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \lambda\left\|\nabla\theta^{\varepsilon}\right\|^2_{L_2(Q_T)} =$$

$$= \left\|\theta_0^{\varepsilon}(x)\right\|^2_{L_2(\Omega)} \Rightarrow \left\|\theta^{\varepsilon}(T,x)\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le \left\|\theta_0^{\varepsilon}(x)\right\|^2,$$

отсюда, так как T – произвольное число, то $\forall t \le T$:

$$\left\|\theta^{\varepsilon}(t,x)\right\|^2 \le \left\|\theta_0^{\varepsilon}(x)\right\|^2.$$

Далее легко вытекает оценка

$$\max_{0\le t\le T}\left\|\theta^{\varepsilon}(t,x)\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \lambda\left\|\nabla\theta^{\varepsilon}(t,x)\right\|^2_{L_2(Q_T)} \le$$

$$\le 2\left\|\theta_0^{\varepsilon}(x)\right\|^2_{L_2(\Omega)} < \infty. \qquad (7)$$

Теперь в интегральном тождестве возьмем $\Phi = \psi^{\varepsilon}(t,x)$ и получим

$$\varepsilon\left\|\psi_t^{\varepsilon}\right\|^2_{L_2(Q_T)} + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\left\|\nabla\psi^{\varepsilon}\right\|^2 dt + \mu\left\|\Delta\psi^{\varepsilon}\right\|^2_{L_2(Q_T)} =$$

$$= \varepsilon\int_0^T (Q_m, \psi^{\varepsilon})_{\Omega} dt -$$

$$-\gamma\int_0^T (\theta_y^{\varepsilon}, \psi)_{\Omega} dt - \varepsilon(\psi_1(x), \psi(0))_{\Omega}. \qquad (8)$$

Оценивая правую часть как в [3], из (8) имеем

$$\varepsilon\left\|\psi_t^{\varepsilon}\right\|^2_{L_2(Q_T)} + \frac{1}{2}\left\|\nabla\psi^{\varepsilon}(T,x)\right\|^2 + \mu\left\|\Delta\psi^{\varepsilon}\right\|^2_{L_2(Q_T)} \le$$

$$\le \delta\int_0^T \left\|\nabla\psi^{\varepsilon}\right\|^2 dt + C_1\varepsilon^2 + C_2\varepsilon + C_3, \qquad (9)$$

$$\left\|\nabla\psi(T,x)\right\|^2 \le \delta\int_0^T \left\|\nabla\psi(t,x)\right\|^2 dt + C_1\varepsilon^2 + C_2\varepsilon + C_3.$$

Далее, проводя аналогичные выкладки как в [3], из (8) имеем

$$\varepsilon\left\|\psi_t\right\|^2_{L_2(Q_T)} + \max_t\left\|\nabla\psi^{\varepsilon}(t,x)\right\|^2_{L_2(\Omega)} +$$

$$+\mu\left\|\Delta\psi^{\varepsilon}\right\|^2_{L_2(Q_T)} \le C < \infty. \qquad (10)$$

Теперь умножим (4) на $\Delta\theta$ скалярно в $L_2(\Omega)$ и, оценив некоторые из слагаемых, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\|\nabla\theta\right\|^2 + \lambda\left\|\Delta\theta\right\|^2 \le C\left\|\Delta\psi\right\|^2 \cdot \left\|\nabla\theta\right\|^2.$$

Отсюда по лемме Гронуолла имеем

$$\max_t\left\|\nabla\theta\right\|^2 + \left\|\Delta\theta\right\|^2_{L_2(Q_T)} \le C < \infty. \qquad (11)$$

Далее нужно напомнить, что, если умножить неравенство (9) на положительное число ε и повторить дальнейшие выкладки, то легко можно получить оценку

$$\left\|\varepsilon\psi_t\right\|^2_{L_2(Q_T)} < \infty. \qquad (12)$$

Для задачи (1), (2) нужно еще предположить, что имеет место краевое условие $\int_S \frac{\partial\Delta\psi}{\partial n} dS = 0$ (что как раз не противоречит физической постановке задачи).

Далее в интегральном тождестве определения 1 возьмем $\Phi = \Delta\psi^{\varepsilon}(x,t)$ и, проведя соответствующие выкладки, получим неравенство:

$$\varepsilon\left\|\nabla\psi_t\right\|^2_{L_2(Q_T)} + \left\|\Delta\psi(T,x)\right\|^2 + \mu\left\|\nabla\Delta\psi\right\|^2_{L_2(Q_T)} \le$$

$$\le \int_0^T \left\|\Delta\psi\right\|^2 dt + C_1\varepsilon + C_2.$$

Конечно, если рассматривать это неравенство при $\forall\tau \le T$, то имеем

$$\varepsilon\int_0^{\tau}\left\|\nabla\psi_t\right\|^2 dt + \left\|\Delta\psi(\tau,x)\right\|^2 + \mu\left\|\nabla\Delta\psi\right\|^2_{L_2(0,\tau,L_2(\Omega)} \le$$

$$\le \int_0^{\tau}\left\|\Delta\psi\right\|^2 dt + C_1\varepsilon + C_2. \qquad (13)$$

Отсюда, повторяя аналогичные операции, как и при получении оценок (10), (12), легко получаем оценки

$$\varepsilon\left\|\nabla\psi_t\right\|^2_{L_2(Q_T)} + \max_t\left\|\Delta\psi(t,x)\right\|^2_{L_2(\Omega)} +$$

$$+\left\|\nabla\Delta\psi\right\|^2_{L_2(Q_T)} \le C, \qquad (14)$$

$$\left\|\nabla\psi_t\right\|^2_{L_2(Q_T)} \le C < \infty. \qquad (15)$$

Выражение (15) получается умножением (13) на $1/\varepsilon$ и повторением известных выкладок.

Дальнейшее доказательство теоремы опирается на метод Галеркина. Пусть W_j – базис

пространства $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\cap W_2^2(\Omega)$, ортонормированный в $L_2(\Omega)$ из задачи

$$\Delta W_j=\lambda_j W_j,\quad W_j\big|_S=\frac{\partial W_j}{\partial n}\bigg|_S=0. \qquad (16)$$

Построим последовательность приближенных решений

$$\psi^{N,\varepsilon}=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j(t)W_j, \qquad (17)$$

а функции $\theta^{\varepsilon,N}$ находятся из уравнения

$$\frac{\partial\theta^{\varepsilon,N}}{\partial t}+(\psi_N^{\varepsilon})_y\frac{\partial\theta^{\varepsilon,N}}{\partial x}-$$

$$-(\psi^{N,\varepsilon})_x\frac{\partial\theta^{\varepsilon,N}}{\partial y}=\lambda\Delta\theta^{\varepsilon,N}, \qquad (18)$$

Числа $\alpha_j(t)$ находятся из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(\varepsilon(\psi^{\varepsilon,N})_{tt}+\varepsilon Q_m+(\Delta\psi^{\varepsilon,N})_t+$$

$$+\frac{\partial\psi^{\varepsilon,N}}{\partial y}\frac{\partial\omega^{\varepsilon,N}}{\partial x}-\frac{\partial\psi^{\varepsilon,N}}{\partial x}\frac{\partial\omega^{\varepsilon,N}}{\partial y}-\mu\Delta\omega^{\varepsilon,N}-$$

$$-\gamma(\theta^{\varepsilon,N})_y,W_j)_\Omega=0,\quad \omega^{\varepsilon,N}=\Delta\psi^{\varepsilon,N},$$

$$j=\overline{1..N}. \qquad (19)$$

Стандартным образом можно доказать существование решения задачи (17)-(19). Для этих решений уже известным способом можно получить следующие оценки:

$$\left\|\theta^{\varepsilon,N}\right\|^2_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))}+\left\|\nabla\theta^{N,\varepsilon}\right\|^2_{L_\infty(0,T,L_2)}+$$

$$+\left\|\Delta\theta^{\varepsilon,N}\right\|^2_{L_2(Q_T)}\le C<\infty, \qquad (20)$$

$$\left\|\varepsilon(\psi^{\varepsilon,N})_t\right\|^2_{L_2(Q_T)}+\left\|(\nabla\psi^{N,\varepsilon})_t\right\|^2_{L_2(Q_T)}+$$

$$+\left\|\Delta\psi^{N,\varepsilon}\right\|^2_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))}+\left\|\nabla\Delta\psi^{N,\varepsilon}\right\|^2_{L_2(Q_T)}\le C.$$

Эти оценки позволяют выделить подпоследовательности, для которых:

$$\theta^{\varepsilon,N}\to\theta^{\varepsilon}* \text{ слабо в } L_\infty(0,T,L_2(\Omega)),$$

$$\theta^{N,\varepsilon}\to\theta^{\varepsilon}* \text{ слабо в } L_\infty(0,T,W_2^1(\Omega)),$$

$$\theta^{N,\varepsilon}\to\theta^{\varepsilon} \text{ слабо в } L_2(0,T,W_2^2(\Omega)),$$

$$\varepsilon\psi_t^{N,\varepsilon}\to\varepsilon\psi_t^{\varepsilon} \text{ слабо в } L_2(0,T,L_2(\Omega)),$$

$$\psi_t^{N,\varepsilon}\to\psi_t^{\varepsilon} \text{ слабо в } L_2(0,T,\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)),$$

$$\psi^{N,\varepsilon}\to\psi^{\varepsilon}* \text{ слабо в } L_\infty(0,T,W_2^2(\Omega)),$$

$$\psi^{N,\varepsilon}\to\psi^{\varepsilon} \text{ сильно в } L_2(0,T,W_2^1(\Omega)).$$

Эти соотношения при $N\to\infty$ в (6) позволяют показать, что предельные функции $\psi^{\varepsilon},\theta^{\varepsilon}$ являются обобщенным решением задачи (3), (4).

Далее, так как оценки (20) не зависят от малого параметра ε, то имеют место следующие соотношения при $\varepsilon\to 0$:

$$\theta^{\varepsilon}\to\theta* \text{ слабо в } L_\infty(0,T,W_2^1(\Omega)),$$

$$\theta^{\varepsilon}\to\theta \text{ слабо в } L_2(0,T,W_2^2(\Omega)),$$

$$\varepsilon\psi_t^{\varepsilon}\to 0 \text{ слабо в } L_2(0,T,L_2(\Omega)),$$

$$\psi_t^{\varepsilon}\to\psi_t \text{ слабо в } L_2(0,T,\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)),$$

$$\psi^{\varepsilon}\to\psi* \text{ слабо в } L_\infty(0,T,W_2^2(\Omega)),$$

$$\psi^{\varepsilon}\to\psi \text{ сильно в } L_2(0,T,W_4^1(\Omega)),$$

Данные соотношения позволяют, переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$ в соответствующих тождествах, показать, что предельные функций ψ, θ являются обобщенным решением (1), (2).

Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Т.И.* Механика сплошной среды. В 2 т. М.: Наука, 1973. Т. 1. 536 с.

2. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407с.

3. *Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983. 318 с.

Резюме

Ток функциясы мен құйын жылдамдығы айнымалылары арқылы берілген сығылмайтын тұтқыр сұйықтықтың температураны ескергендегі ε-регуляризациясы зерттелді. Жалпылама шешімнің бар болуы мен жинақталуы дәлелденген. Бірқалыпты априорлық бағалар алынған.

Summary

In this work it is investigated ε-approximation one model of a viscous incompressible liquid in variables of function of a current and a whirlwind of speeds in view of temperatures. Existence and convergence of the generalized decision of an auxiliary task is proved. Uniform aprioristic estimations are received.

УДК 517.946

Кокшетауский университет *Поступила 2.05.06г.*