Б. РЫСБАЙУЛЫ, А. Т. БАЙМАНКУЛОВ, А. О. ИСМАЙЛОВ

РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ГРУНТА В ПРОЦЕССЕ ПРОМЕРЗАНИЙ

1. Постановка задачи

Чтобы определить коэффициент теплопроводности талого, мерзлого продукта и определить изменение λ в зоне фазовых превращения грунта, необходимо решить следующую задачу [1, 2]:

$$\gamma_0 c\frac{\partial\theta}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}),\ 0<z<H. \quad (1)$$

$$\theta\big|_{z=0}=0,\quad \lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}=-\lambda(\theta_1(t)-T_b(t)), \quad (2)$$

$$\theta\big|_{t=0}=\theta_0(z), \quad (3)$$

$$\left[\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]_{z=h(t)}=\gamma_0 q[\omega_x]_{z=h(t)}, \quad (4)$$

$$\left[\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]_{z=h_1(t)}=0. \quad (5)$$

Здесь $\theta(z,t)$ - температура грунта, $\theta_1(t)$ - температура грунта на поверхности земли, $T_b(t)$ - температура воздуха. Параметры, входящие в (1)-(5) $\gamma_0, C(z), \lambda(z)$ - соответственно удельный вес, коэффициент теплоемкости и коэффициент теплопроводности грунта. Величина λ определяется составом грунта, теплопроводностью отдельных его компонент, структурой и текстурой породы. Влиянием влажности грунта на λ в свое время занимались ученые: Франчук [3]; Чудновский [4]; Kersten [5]. В работах [6, 7] Kersten и Чудновский наиболее подробно исследует зависимость λ от объемного веса γ. Существует многочисленные экспериментальные данные, в которых определялись коэффициент теплопроводности различных материалов в лабораторных условиях, и составлены таблицы λ основных материалов и горных пород, часто встречающих на практике и в производстве. Но до сих пор не разработан достаточно надежный метод определения характеристики грунта в полевых условиях. Поэтому в данной работе описывается метод с помощью, которой определяется тип грунта, зная температуры грунта на поверхности земли.

Задача (1)-(5) решается в области $Q=(0,H)\times(0,T)$. Температура грунта θ зависит от двух переменных, z и t. Где $z\in(0,H)$, $t\in(0,T)$. Ось oz направлена вверх, начало координат находится на низменном слое грунта. Границы перехода от одной зоны в другую определяются по температурному признаку, т.е. $\theta(h(t),t)=\Theta$ граница талой и фазовой зоны; $\theta(h_1(t),t)=\Theta_1$ граница фазовой и мерзлой зоны. Параметры, присутствующие в (1) считаются функциями от z, т.е.

$$C=C(z), \lambda=\lambda(z), \gamma_0=\gamma_0(z).$$

В том случае, если $z\in(h(t),h_1(t))$, то

$$c(z)=\bar{c}(z)+q\frac{d\omega_H}{d\theta},\quad \lambda(z)=\bar{\lambda}(z)+\gamma_0 q_0\beta.$$

2. Разностная схема

Отрезок (0,*H*) разбиваем на *n* равных частей с шагом $h=H/N$; а отрезок (0,*T*) разбивает на *m* равных частей с шагом $\Delta t=T/m$. Сеточный аналог функции $\theta(z_i, t_j)$ обозначим через $Y_i^j=\bar{Y}$, а сеточный аналог $\theta(z_i,t_j+\Delta t)$ обозначим через $Y_i^{J+1}=Y$. Область $Q=(0,H)\times(0,T)$ переходит в сетку

$$Q_{h,\Delta t}=\{z_i=i\cdot h;\ i=0,1,2,...,N;$$
$$t_j=j\cdot\Delta t,\ j=0,1,2,...,m\}$$

В области $Q_{h,\Delta t}$ рассмотрим задачу

$$\gamma_0 C(z_i)\frac{Y_i^{J+1}-Y_i^J}{\Delta t}=$$
$$=\frac{1}{h}\left(\lambda_{1+i}\frac{Y_{i+1}^{J+1}-Y_i^{J+1}}{h}-\lambda_i\frac{Y_i^{J+1}-Y_i^{J+1}}{h}\right), \quad (6)$$

$$Y_0^{j+1}=0, \lambda_N\frac{Y_N^{j+1}-Y_{N-1}^{j+1}}{h}=-2(\theta_1^{j+1}-T_b^{j+1}), \quad (7)$$

$$Y_i^0 = \theta_0(z_i), i = 0,1,2,\dots,N, \quad (8)$$

где

$$C(z_i) = \overline{C}(z_i) + q_0 \cdot \nu(z), i = 1,2,\dots,n-1, \quad (9)$$

$$\nu(z) = 0, \text{ если } Y > \Theta \text{ или } Y < \Theta_1,$$

$$\nu(z) \neq 0, \text{ если } \Theta \le Y \le \Theta_1, \quad (10)$$

$$\lambda(z) = \overline{\lambda} + q_0\gamma_0\beta(z). \quad (11)$$

Коэффициент теплопроводности $\lambda(z)$ определяется итеративно. Через n-обозначим номер итераций. Перепишем разностную схему (1) в виде:

$$\frac{Y^{n+1} - \overline{Y}^{n+1}}{\Delta t}\gamma_0 c_i = \left(\lambda_{n+1,i+1} \cdot Y_{i,z}^{n+1}\right)_{\bar{z}}.$$

Здесь $Y_i^{j+1,n+1} = Y^{n+1}$ приближенное значение температуры на n+1-ом итераций.

Тогда на n-ом приближений разностное уравнение записывается в виде

$$\frac{Y^{n} - \overline{Y}^{n}}{\Delta t}\gamma_0 c_i = \left(\lambda_{n,i+1} \cdot Y_{i,z}^{n}\right)_{\bar{z}}.$$

Для функции $Y^{n+1} - Y^n = \Delta Y$ получаем разностную задачу

$$\gamma_0 c(\Delta y)_{\bar{t}} = \left(\Delta\lambda Y_{i,z}^{n+1} + \lambda_{n,i+1}\Delta Y_z\right)_{\bar{z}}, \quad (12)$$

$$\Delta Y\big|_{i=0} = 0, \ \Delta Y_{\bar{z}}\big|_{i=N} = 0, \quad (13)$$

$$\Delta Y\big|_{j=0} = 0, \quad (14)$$

где $\Delta\lambda = \lambda_{n+1}(z_i) - \lambda_n(z_i)$.

Из системы (12)-(14) поступая аналогично, как в работе [8] получаем сопряженную задачу

$$\gamma_0 c U_{\bar{t}} + \left(\lambda\overline{U}_z\right)_z = 0,$$

$$i = 1,2,\dots,N-1; \ J = m-1, m-2,\dots,1; \quad (15)$$

$$U_i^m = 0, \ i = 1,2,\dots,N; \quad (16)$$

$$U_0^J = 0, \lambda U_{N,\bar{z}}^J = -2(Y^{j+1} - \theta_1^{J+1}),$$

$$J = 0,1,2,\dots,m-1. \quad (17)$$

Коэффициент теплопроводности многослойного грунта определяется из минимума функционала:

$$J(\lambda) = \sum_{J=1}^{m} |\,\theta_1(t_j) - Y^{j,n+1}\,|^2 \ \Delta t,$$

где $\theta_1(t)$ - температура грунта на поверхности земли, Y^{n+1} - приближенное значение температуры грунта на поверхности земли. В работе для разности функционалов получена формула

$$J(\lambda_{n+1}) - J(\lambda_n) =$$

$$= -\sum_J (\Delta Y_N)^2\Delta t + \sum_J \Delta\lambda Y_{\bar{x}}^{n+1} * \overline{U}_{\bar{x}}^{n+1}\Delta t.$$

Если

$$\Delta\lambda = -\beta\sum Y_{\bar{z}}^{n+1}\overline{U}_{\bar{z}}^{n+1}\Delta t,$$

то

$$J(\lambda_{n+1}) - J(\lambda_n) =$$

$$= -\beta\left(\sum_J Y_{\bar{z}}^{n+1}\overline{U}_{\bar{z}}^{n+1}\Delta t\right)^2 - \sum_J (\Delta Y_N)^2\Delta t. \quad (18)$$

Правый часть знака равенство формулы (18) не являются положительной, поэтому последовательность $\{J(\lambda_n)\}$ является монотонной, т.е.

$$J(\lambda_0) \ge J(\lambda_1) \ge J(\lambda_2) \dots \ge J(\lambda_n) \ge \dots$$

Тогда, приближенное значение коэффициента теплопроводности грунта определяется по формуле:

$$\lambda_{n+1}(z_i) - \lambda_n(z_i) = -\beta\sum_j Y_{i,\bar{z}}^{n+1}\overline{U}_{i,\bar{z}}^{n+1}\Delta t$$

$$i = 0,1,2,\dots,n-1 \quad (19)$$

В работе доказаны:

Теорема 1. Если $\theta_0(z) \in L_2(0,H), \theta_1(t)$, $T_в(t) \in W_2^1(0,T)$, $0 < C_0 \le C(z) \le \overline{C}_0 < \infty$, то для решение задачи (6)-(11) справедлива оценки

$$\max_j \|Y\|^2 + \sum_J \left\|\sqrt{\lambda}Y_{\bar{z}}\right\|^2\Delta t \le \|\theta_0\|^2, \ \max_i |Y| \le \max_i |\theta_0|.$$

Теорема 2. Если $\theta_0(z) \in W_2^1(0,H)$, $\theta_1(t), T_в(t) \in W_2^2(o,T)$ и $0 < C_0 \le C(z) \le \overline{C}_0 < \infty$, то для решения задач (6)-(11) имеет место неравенства

$$\max_J \|Y_t\|^2 + \sum_J \left\|\sqrt{\lambda}Y_{\bar{x}t}\right\|^2\Delta t \le \left\|Y_t^0\right\|^2,$$

$$\max_i \|Y_t\| \le \max_i \left|Y_t^0\right|.$$

Теорема 3. Если $\theta_0(x) \in L_2(0,H)$, $\theta_1(t), T_b(t) \in W_2^1(0,T)$ и $0 < C_0 \le C(z) \le C_1 < \infty$, то для решения задачи (15)-(17) справедливо оценка

$$\max_j \| U \| + \sum_j \left\| \sqrt{\lambda} U_{\bar{z}} \right\|^2 \Delta t \le C_2 \sum_i \frac{h}{\lambda(z_i)}.$$

Теорема 4. Если $\theta_0(x) \in W_2^1(0,H)$, $\theta_1(t), T_b(t) \in W_2^2(0,T)$ и $0 < C_0 \le C(z) \le \overline{C_0} < \infty$, то для решения задачи (15)-(17) справедлива оценка

$$\max_j \| U_t \|^2 + \sum_j \| \sqrt{\lambda} U_{\bar{z}t} \|^2 \Delta t \le C_3 \left(1 + \sum_i \frac{h}{\lambda_i} \right).$$

Теорема 5. Если $\theta_0(x) \in W_2^1(0,H)$, $\theta_1(t), T_b(t) \in W_2^2(0,T)$ $0 < C_0 \le C(z) \le \overline{C}_0 < \infty$, то итерационный процесс (19) сходится и имеют место оценки $0 < C_4 \le \lambda_{n+1}(z_2) \le C_5 < \infty$.

Теорема 6. Если $\theta_0(z) \in L_2(0,H)$, $\theta_1(t), T_b(t) \in W_2^1(0,T)$, $0 < c_0 \le c(z) \le \overline{c_0} < \infty$ схема (6)-(11) является устойчивой по начальным данным $\theta_0(z)$ и справедлива оценка

$$\max_j \left\| Y - \widetilde{Y} \right\|^2 + \sum_j \left\| Y_z - \widetilde{Y}_{\bar{z}} \right\|^2 \le C_6 \left\| \theta_0 - \widetilde{\theta}_0 \right\|^2,$$

где $\widetilde{Y}$ решение возмущенной задачи.

Теорема 7. Если $\theta_0(z) \in W_2^1(0,H)$, $\theta_1(t), T_t(t) \in W_2^2(O,T)$, $0 < C_0 \le C(z) \le \overline{C}_0 < \infty$, то схема (15)-(17) является устойчивой по начальным данным и справедливо оценка

$$\max_j \left\| U - \widetilde{U} \right\| + \sum_j \left\| U_{\bar{z}} - \widetilde{U}_{\bar{z}} \right\|^2 \Delta t \le C_7 \left\| \theta_0 - \widetilde{\theta}_0 \right\|^2.$$

Теорема 8. Если решение дифференциальной задачи (1)-(5) обладает свойством $\frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial t} \in L_2(Q)$, $\theta(\mathrm{t},\mathrm{z}) \in W_2^1\left(0,T;\, \mathrm{W}_2^2(0,H)\right)$, то решение приближенной задачи (6)-(11) сходится к решению исходной задачи (1)-(5) при $\Delta t \to 0, h \to 0$, и справедливо оценка

$$\max_j \left\| \theta(t_j, z_i) - Y_i^j \right\|^2 +$$

$$+ \sum_j \left\| \frac{\partial \theta}{\partial z} - Y_{i,z}^{j+1} \right\|^2 \Delta t \le C_8 (h + \Delta t)^2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рысбайулы Б., Исмайлов А.* Определение коэффициента теплопроводности однородного грунта в процессе промерзаний (в печати, 2008).

2. *Мартынов Г.А.* Тепло- и влагоперенос в промерзающих и оттаивающих грунтах. Основы геокрилогии (мерзлотоведения). М., 1959. Под. ред. Н. А. Цытович. Гл. VI. С. 153-192.

3. *Франчук А.У.* Теплопроводность строительных материалов в зависимости от влажности. Стройиздат, 1941.

4. *Чудновский А.Ф.* Физика теплообмена в почве. М.: Гостехиздат, 1948.

5. *Kersten M.S.* The thermal conductivity of soils. Proceedings. 2-nd Intern, confer, on soil mechanics a. foundation engineering, V. 3. Rotterdam, 1948.

6. *Kersten M.S.* Thermal properties of soils. Frost Action in soils. A Symposium. High way Research Board Special Report 2, Minneapolis, 1949.

7. *Чудновский А.Ф.* Теплообмен в дисперсных средах. М.: Гостехиздат, 1954. 444 с.

8. *Рысбайулы Б., Маханбетова Г.И.* Разностная схема для обратной задачи кондуктивного распространения тепла в однородной среде (в печати, 2008).

9. *Жумагулов Б.Т., Рысбайұлы Б., Адамов А.А.* Сходимость разностной схемы для обобщенной задачи Стефана конвективного распространения влаги // Вестник НАН РК. 2007. №5. С. 30-41.

Резюме

Біртекті топырақтың тоңу процесінің параметрін идентификациялау есебі қарастырылады. Жылу өткізгіштік коэффициентін анықтайтын айырымдық итерациялық тәсіл ұсынылып, айырымдық итерациалық процестің жинақтылығы дәлелденеді.

Summary

In this work considered of identification parameters heat conductivity in process of freeing. It is offered the difference iterative method, which half defined coefficient heat conductivity of a ground, convergence of iterative process is prove.

Поступила 5.03.08г.