Б. РЫСБАЙУЛЫ, А. Т. БАЙМАНКУЛОВ

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕРМОГРАДИЕНТНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

1. Постановка задачи.

Конвективный перенос тепла в грунте осуществляется водой или воздухом. Передвижение воды в многослойном грунте может происходить как в жидкой, так и в парообразной форме. Парообразный механизм передвижение воды вызывает интерес только тогда, когда он сопровождается испарением и конденсацией влаги. В противном случае поток пара в одном направлении компенсируется потоком воздуха в обратном, и перенос тепла в грунте практически отсутствует.

Передвижение влаги может осуществляться в грунте или в результате фильтрации (т. е. под воздействием гравитационных сил), или в результате миграции (т. е. под воздействием «внутренних» сил, возникающих в самом грунте на поверхностях раздела вода – воздух, вода – минеральный скелет), или тем и другим путем одновременно. Мартынов Г. А., Глобус А. М. [1, 2] и другие ученые доказали, что механизм движения в обоих случаях совершенно одинаков, хотя силы, вызывающие его, различны.

Система дифференциальных уравнений описывающие конвективное распространение влаги и тепла в однородной среде записывается в виде

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_0 C\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\\ &\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\mu\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\end{aligned}\right\}\ 0<z<H,\quad (1)$$

где C – коэффициент теплоемкости; λ – коэффициент теплопроводности; κ – коэффициент влагопроводности; γ_0 – удельная масса грунта; μ – термоградиентный коэффициент.

На поверхности земли с воздухом справедливо закон сохранения энергий

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\bigg|_{z=H}+\alpha\left(\theta-T_b\right)\Big|_{z=H}=0.$$

Для того чтобы определить коэффициент теплопроводности неоднородного грунта дополнительно задается температура на поверхности земли

$$\theta(H,t)=\theta_1(t),\ \ 0<t<T. \qquad (2)$$

С учетом (2) условие на поверхности земли записывается в виде

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\bigg|_{z=H}+\alpha\left(\theta_1(t)-T_b\right)\Big|_{z=H}=0,$$

где α – коэффициент теплоотдачи грунта в окружающую среду, ккал/(м^2·час·град).

В данной работе рассматривается однородный грунт.

Установлено, что на определенной глубине земли температура грунта остается постоянной величиной. Используя этот факт, ставится граничное условие

$$\theta(0,t)=T_1=const. \qquad (3)$$

Отметим, что ось Oz направлено вертикально вверх. В начальный момент времени, при $t=0$ распределение температуры в грунте задается, т.е.

$$\theta(z,0)=\theta_0(z),\ \ 0\le z\le H. \qquad (4)$$

На поверхности земли и на глубине $z=H$ ставятся граничные условия для влаги

$$\frac{\partial\omega}{\partial z}\bigg|_{z=H}=A(t),\quad \omega\big|_{z=0}=\omega_2. \qquad (5)$$

Кроме этого в начальный момент времени $t=0$ считается известным распределения температуры и влаги

$$\theta(0,z)=\theta_0(x),\ \ \omega(0,z)=\omega_0(z). \qquad (6)$$

Требуется определить термоградиентный коэффициент μ.

2. Разностная схема.

Введем функцию $\varpi(z,t)=\omega(z,t)-\omega_2-zA(t)$.

Легко проверить, что $\dfrac{\partial\varpi}{\partial z}\bigg|_{z=H}=0$, $\varpi(0,t)=0$.

Тогда

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{\partial\varpi}{\partial t}+zA'(t),\ \ \frac{\partial\omega}{\partial z}=\frac{\partial\varpi}{\partial z}+A(t).$$

Найденные значения подставляем во второе уравнением системы (1). Тогда

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\mu\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)+f(z,t), \quad (7)$$

где $f(z,t)=-zA'(t)$.

В сеточной области $Q_{h,\Delta t}=\{z_i=i\cdot h;\ i=0,1,2,...,N;\ t_j=j\cdot\Delta t,\ j=0,1,2,...,m\}$ рассмотрим задачу

$$\gamma_0 C(z_i)\frac{Y_i^{J+1}-Y_i^J}{\Delta t}=$$

$$=\frac{1}{h}\left(\lambda_{1+i}\frac{Y_{i+1}^{J+1}-Y_i^{J+1}}{h}-\lambda_i\frac{Y_i^{J+1}-Y_i^{J+1}}{h}\right), \quad (8)$$

$$W_{\bar t}=(\kappa W_z)_{\bar z}+(k\mu Y_z)_{\bar z}+f(z,t),$$

$$Y_0^{j+1}=0,\lambda_N\frac{Y_N^{j+1}-Y_{N-1}^{j+1}}{h}=-2(\theta_1^{j+1}-T_b^{j+1}), \quad (9)$$

$$W_0^{j+1}=0,\frac{W_N^{j+1}-W_{N-1}^{j+1}}{h}=0.$$

3. Сопряженная задача.

Приближенное значение термоградиентного коэффициента определяется итерационным методом. Пусть задано μ_n. Следующее приближение определяется из минимума функционала

$$J(\mu)=\sum_{J=1}^{m}|\theta_1(t_j)-Y_N^j|^2\ \Delta t,$$

где $\theta_1(t)$ – температура грунта на поверхности земли; y_N^{j+1} – приближенное значение температуры грунта на поверхности земли.

В работе для разности функционалов получена формула

$$J(\lambda_{n+1})-J(\lambda_n)=-\sum_i\beta\left(\sum_J Y_{\bar z}^{n+1}\overline{U}_{\bar z}^{\,n}\Delta t\right)^2 h-$$

$$-\sum_J(\Delta Y_N)^2\Delta t-\sum_{i,j}\Delta Y k\mu Y_{\bar z}^{n+1}\Delta\overline{U}_{\bar z}^{\,n}. \quad (10)$$

Тогда, приближенное значение термоградиентного коэффициента грунта определяется по формуле:

$$\mu_{n+1}(z)-\mu_n(z)=-\beta\sum_J Y_{\bar z}^{j+1}U_{\bar z}^{j}\Delta t. \quad (11)$$

При этом, из системы (8)-(9) используя идею разработанной в работе [4], получаем сопряженную задачу

$$U_{\bar t}+(k\mu\overline{U}_z)_z=0,$$

$$i=1,2,...,N-1;\ J=m-1,m-2,...,1; \quad (12)$$

$$U_i^m=0,\ i=1,2,...,N; \quad (13)$$

$$U_0^J=0,k\mu U_{N,\bar z}^J=-2(Y_N^{j+1}-\theta_1^{J+1}),$$

$$J=0,1,2,...,m-1. \quad (14)$$

4. Алгоритм решения задачи.

4.1. Задается начальное приближение термоградиентного коэффициента μ_n.

4.2. Решается прямая задача (8)-(9) (используется метод разработанная в работах [3, 4]) и определяются Y_z и Y_N^{j+1}.

4.3. Решается сопряженная задача (12)-(14) и определяется U_z^j.

4.4. Определяется следующее приближение μ_{n+1} по формуле (11).

4.5. Вычисляется значение функционала по формуле

$$J(\mu)=\sum_{J=1}^{m}|\theta_1(t_j)-Y_N^j|^2\ \Delta t.$$

4.6. Если $\left|\frac{J(\mu_{n+1})-J(\mu_n)}{J(\mu_n)}\right|<\varepsilon$, то процесс вычисления прекращается и за приближенные значения $\mu(z)$ берется $\mu_{n+1}(z)$.

5. Доказанные теоремы.

Теорема 1. Для решение задачи (8)-(9) справедливо оценка

$$\gamma_0 C\|Y^n\|^2+\sum_j\left\|\sqrt{\lambda_n}Y_z\right\|^2\Delta t+\|W^n\|^2+$$

$$+k\sum_j\left\|\sqrt{\mu_n}W_z\right\|^2\Delta t\le C_1<\infty,$$

$$\max_i\max_j|Y_i^j|=M<\infty,$$

где $\|Y\|^2=\sum_i(Y_i^j)^2\Delta z$.

Теорема 2. Для решение задачи (12)-(14) справедливо оценка

$$\max_j \|U\| + \sum_j \left\| \sqrt{\mu} U_z \right\| \le C_2 .$$

Теорема 3. Если имеет место теоремы 1 и теоремы 2, то

$$\left| \nabla J(\mu) \right| \le C_3 .$$

Теорема 4. Последовательность $\{\lambda_n\}$ сходится к одному пределу и ограничено сверху и снизу положительной константой.

Теорема 5. Последовательность $\{J(\lambda_n)\}$ является монотонно убывающей и ограничено сверху положительной константой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мартынов Г.А.* Тепло- и влагоперенос в промерзающих и оттаивающих грунтах. Основы геокриологии (мерзлотоведения). М., 1959. Под. ред. Н. А. Цытович. Гл. VI. С. 153-192.

2. *Глобус А.М.* Физика неизотермического внутрипочвенного влагообмена. Л.: Гидрометиздат, 1983. 279 с.

3. *Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т., Маханбетова Г.И.* Обратная задача кондуктивного распространения тепла в однородной среде // Вестник НАН РК. 2008. №1. С. 11-13.

4. *Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т., Исмайлов А.О.* Разностный метод определение коэффициента теплопроводности грунта в процессе промерзаний // Вестник НАН РК. 2008. №2. С. 7-9.

5. *Жумагулов Б.Т., Рысбайулы Б., Адамов А.А.* Сходимость разностной схемы для обобщенной задачи Стефана конвективного распространения влаги // Вестник НАН РК. 2007. №5. С. 30-41.

6. *Адамов А.А., Рысбайулы Б.* Алгоритм численного решения задачи переноса тепла и влаги // Евразийский математический журнал. 2007. №3. С. 19-25.

Резюме

Жылу мен ылғалдың біртекті ортамен таралу есебі қарастырылады. Жылу градиенті коэффициентін анықтайтын итерациялық тәсіл ұсынылады және оның жинақтылығы зерттеледі.

Summary

This work consideres the joint movement of water and heat in homogeneous environment. The approached method is offered,which helps to define thermo gradient coefficient of environment. The convergence of the iterative process is proved.

Поступила 10.04.08г.