А. О. СУЛТАНБЕКОВА

БЭРОВСКИЙ КЛАСС ФУНКЦИЙ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА КАК ФУНКЦИЙ НЕПРЕРЫВНОГО ПАРАМЕТРА ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ *n*-ГО ПОРЯДКА

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t,\omega)\cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t,\omega)\cdot \dot{y} + \\ + a_0(t,\omega)\cdot y. \quad t \in R^+, \qquad (1)$$

где $a_0(t,\omega), a_1(t,\omega), \ldots, a_{n-1}(t,\omega) \in C^+$ (C^+ - пространство непрерывных и ограниченных на $R^+ = [0,+\infty)$ функций, $\omega \in (0,1]$.

Эквивалентная уравнению (1) линейная дифференциальная система имеет вид

$$\dot{x} = A(t,\omega)\cdot x, \qquad (2)$$

где

$$x = colon(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad \ldots, \quad x_n = y^{(n-1)},$$

$$A(t,\omega) = \\ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_0(t,\omega) & a_1(t,\omega) & a_2(t,\omega) & \ldots & a_{n-1}(t,\omega) \end{pmatrix}.$$

Показатели Ляпунова уравнения (1) $\lambda_1(\omega) > \lambda_2(\omega) > \ldots > \lambda_n(\omega)$ определяются как показатели Ляпунова системы (2). Используемые здесь необходимые сведения из теории показателей содержатся в [1]. Здесь мы изучаем функции $\lambda_1(\omega) > \lambda_2(\omega) > \ldots > \lambda_n(\omega)$ с точки зрения их классификации по Бэру (см. [2]).

Строгая принадлежность второму классу Бэра показателей линейных систем (размерности не меньше двух) следует из статей [3, 4]. Однако для систем вида (2) данный результат неприменим, так как в данном случае рассматриваются системы специального вида.

Для приведенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с непрерывной и линейной зависимостью коэффициента от параметра аналогичные результаты получены в [5] и [6] соответственно.

В случае линейной зависимости от параметра коэффициента при первой производной искомой функции для уравнения второго порядка общего вида строгая принадлежность показателей Ляпунова второму классу Бэра доказана в [7], а условия непрерывности показателей установлены в [8].

Здесь изучается вопрос принадлежности показателей Ляпунова второму бэровскому классу в случае непрерывной зависимости от параметра коэффициентов линейного дифференциального уравнения n-го порядка.

Теорема. Существуют такие функции $a_0(t,\omega), a_1(t,\omega), \ldots, a_{n-1}(t,\omega) \in C^+$, что показатели Ляпунова $\lambda_1(\omega), \lambda_2(\omega), \ldots, \lambda_n(\omega)$ уравнения (1) принадлежат строго второму классу Бэра.

Доказательство.

1. Если мы покажем, что для некоторых $a_0(t,\omega), a_1(t,\omega), \ldots, a_{n-1}(t,\omega) \in C^+$ каждая точка полуинтервала (0,1] является точкой разрыва функций $\lambda_1(\omega), \lambda_2(\omega), \ldots, \lambda_n(\omega)$, то в силу теоремы VI на стр. 243 из [9] это будет означать, что эти функции не принадлежат первому классу Бэра. Тогда, учитывая, что они входят во второй класс, мы установим, что они строго второго класса.

Для всех $\omega \in (0,1]$ определим кусочно-постоянные функции $\gamma_i = \gamma_i(t,\omega)$, $(i = \overline{1,n})$, следующим образом $\gamma_i(t,\omega) = i + \delta \sin^2(\pi\omega 3^k)$, при $t \in [\varsigma(k), \varsigma(k+1))$, $k = 0,1,2,\ldots$ где $\varsigma(0) = 0, \varsigma(k) = \varsigma(k-1) + 3^k$, а $\delta > 0$ - заданное вещественное число.

Тогда при фиксированном ω полуинтервалы $[\varsigma(k), \varsigma(k+1))$, $(k = 0,1,2,\ldots)$ задают промежутки постоянства функций $\gamma_i(t,\omega)$, $(i = \overline{1,n})$.

Пусть далее на каждом полуинтервале $[\varsigma(k),\varsigma(k+1))$, $(k=0,1,2,...)$ матрица коэффициентов системы (2) $A(t,\omega)$ принимает постоянное значение, а характеристическое уравнение для $A(t,\omega)$ имеет вид

$$(\gamma-\gamma_1(t,\omega))\cdot(\gamma-\gamma_2(t,\omega))\cdot...\cdot(\gamma-\gamma_n(t,\omega))=0.$$

Тем самым, кусочно-постоянная матрица $A(t,\omega)$ однозначно определена, а следовательно, однозначно определены кусочно-постоянные функции $a_0(t,\omega),a_1(t,\omega),...,a_{n-1}(t,\omega)\in C^+$.

Для удобства, на каждом промежутке постоянства матрицу $A(t,\omega)$, линейным преобразованием $T^{-1}\cdot A\cdot T$, будем приводить к диагональному виду

$$\Gamma(\omega)=$$

$$=\begin{pmatrix} 1+\delta\sin^2(\pi\omega 3^k) & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 2+\delta\sin^2(\pi\omega 3^k) & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & n+\delta\sin^2(\pi\omega 3^k) \end{pmatrix}.$$

Такое преобразование возможно так как, собственные значения матрицы $A(t,\omega)$ различны и вещественны на каждом полуинтервале $[\varsigma(k),\varsigma(k+1))$, $(k=0,1,2,...)$. Таким образом, на каждом таком промежутке вместо системы (2) будем рассматривать более простую систему

$$\dot{\tilde{x}}=\Gamma(\omega)\cdot\tilde{x},\quad t\in R^+,\quad \omega\in(0,1]. \qquad (3)$$

Очевидно, что показатели Ляпунова систем (2) и (3) совпадают.

Пусть $X(t,\tau,\omega)$ - матрица Коши системы (3), $\gamma_1=1+\delta\sin^2(\pi\omega 3^k)$, ..., $\gamma_n=n+\delta\sin^2(\pi\omega 3^k)$ - собственные значения матрицы $\Gamma(\omega)$, а $e_1=colon(1,0,...,0)$, ..., $e_n=colon(0,0,...,1)$ - соответствующие им собственные векторы.

Тогда при $t,\tau\in[\varsigma(k),\varsigma(k+1))$ $(k=0,1,2,...)$ имеем

$$X(t,\tau,\omega)e_i=\exp(\Gamma(\omega)(t-\tau))\cdot e_i=\exp(\gamma_i(t-\tau))\cdot e_i,$$

$$i=\overline{1,n}. \qquad (4)$$

2. Зададим на отрезке $I=[0,1]$ два множества σ_1 и σ_2. Выберем любое число $\omega\in I$ и запишем значение ω в троичной системе $\omega=\alpha_1 3^{-1}+\alpha_2 3^{-2}+...$, где $\alpha_j\in\{0,1,2\}$, $j=1,2,...$

Образуем множество σ_1 значений ω, представимых в виде всевозможных конечных разложений, то есть $\omega=\alpha_1 3^{-1}+...+\alpha_r 3^{-r}$; $\alpha_j\in\{0,1,2\}$, $j=1,...,r$, $r\in N$, а множество σ_2 - из значений ω, представимых в виде бесконечных разложений $\omega=\alpha_1 3^{-1}+...+\alpha_s 3^{-s}+3^{-s-1}+3^{-s-2}+...$; $\alpha_j\in\{0,1,2\}$, $j=1,...,s$, $s\in N$, с коэффициентами $\alpha_i=1$ для всех $j\in N$, кроме, может быть, конечного числа.

Ясно, что так определенные множества σ_1, σ_2 плотны на I.

3. Фиксируем значение параметра $\omega\in\sigma_1$. Так как в этом случае $\omega=\alpha_1 3^{-1}+...+\alpha_r 3^{-r}$; $\alpha_j\in\{0,1,2\}$, $j=1,...,r$, $r\in N$, то при $k\ge r$ число $\omega 3^k$ является целым. Значит, при $k\ge r$ в силу (4) имеем

$$X(\varsigma(k+1),\varsigma(k),\omega)e_i=e^{i\cdot 3^{k+1}}\cdot e_i,\quad i=\overline{1,n}. \qquad (5)$$

Пусть k_0 - фиксированное целое число такое, что $k_0\ge r$, и пусть $\tilde{x}_i(t)$ - решение системы (3), удовлетворяющее условию $\tilde{x}_i(\varsigma(k_0-1))=e_i$. С учетом (4), (5) для $k>k_0$ получаем

$$\begin{aligned}
&\tilde{x}_i(\varsigma(k+1))=X(\varsigma(k+1),\varsigma(k),\omega)\times\\
&\times X(\varsigma(k),\varsigma(k-1),\omega)\cdot...\cdot X(\varsigma(k_0+1),\varsigma(k_0),\omega)\times\\
&\times X(\varsigma(k_0),\varsigma(k_0-1),\omega)\cdot e_i=\\
&=\exp(\Gamma(\omega)(\varsigma(k+1)-\varsigma(k)))\cdot...\times\\
&\times\exp(\Gamma(\omega)(\varsigma(k_0)-\varsigma(k_0-1)))\cdot e_i= \qquad (6)\\
&=\exp(\gamma_i(\varsigma(k+1)-\varsigma(k)))\cdot...\times\\
&\times\exp(\gamma_i(\varsigma(k_0)-\varsigma(k_0-1)))\cdot e_i=\\
&=\exp(i\cdot(3^{k+1}+3^k+...+3^{k_0+1}+3^{k_0}))\cdot e_i=\\
&=\exp\left(\frac{i\cdot 3^{k_0}}{2}(3^{k-k_0+2}-1)\right)\cdot e_i,\ i=\overline{1,n}.
\end{aligned}$$

Так как для любого $n > n_0 - 1$

$$\varsigma(n) - \varsigma(n_0 - 1) = 3^n + \ldots + 3^{n_0} = 3^{n_0}(3^{n-n_0+1} - 1)/2, \quad (7)$$

то в силу (6), (7) имеем

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln\|\widetilde{x}_i(\varsigma(k+1))\|}{\varsigma(k+1) - \varsigma(k_0 - 1)} = i, \quad i = \overline{1,n}. \quad (8)$$

Аналогичным образом устанавливается существование предела

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln\|\widetilde{x}_i(\varsigma(k))\|}{\varsigma(k) - \varsigma(k_0 - 1)} = i, \quad i = \overline{1,n}. \quad (9)$$

Далее воспользуемся тем, что для вычисления характеристических показателей решений уравнения (1) с кусочно-постоянными функциями $a_0(t,\omega),\ldots,a_n(t,\omega)$ можно ограничиться последовательностями значений аргумента, которые принадлежат концам промежутков постоянства функций (см. [1], с. 148-149). Отсюда согласно (8), (9) следует, что решения системы (3) с условием $\widetilde{x}_i(\varsigma(k_0 - 1)) = e_i$, а следовательно и системы (2), имеют характеристические показатели $\overline{\lambda}_i(\omega) = i, \quad (i = \overline{1,n})$. Так как они различны, то они являются показателями нормального базиса, а следовательно, после перенумерации по убыванию, совпадают с показателями Ляпунова системы (2).

4. Фиксируем теперь какое-либо значение параметра $\omega \in \sigma_2$. Это означает, что для некоторого s имеет место равенство $\omega = \alpha_1 3^{-1} + \ldots + \alpha_s 3^{-s} + 3^{-s-1} + 3^{-s-2} + \ldots,$ где $\alpha_j \in \{0,1,2\},\ j = 1,\ldots,s.$

В этом случае при любом $r \geq s$ число $\omega \cdot 3^r$ можно записать в виде $l_r + \frac{1}{2}$, где l_r - некоторое натуральное число.

Поэтому, если $k \geq s$, то

$$X(\varsigma(k+1),\varsigma(k),\omega)e_i = e^{i\cdot 3^{k+1}} \cdot e_i, \quad i = \overline{1,n}. \quad (10)$$

Фиксируем целое число k_0, такое что $k_0 \geq s$, и пусть $x_i(t)$ - решение системы (3), удовлетворяющее условию $\widetilde{x}_i(\varsigma(k_0 - 1)) = e_i$. Тогда с учетом (4), (10) при любом $k \geq k_0$

$$\begin{aligned}
&\tilde{x}_i(\varsigma(k+1)) = X(\varsigma(k+1),\varsigma(x),\omega)\times \\
&\times X(\varsigma(k),\varsigma(k-1),\omega)\cdot\ldots\cdot X(\varsigma(k_0+1),\varsigma(k_0),\omega)\times \\
&\times X(\varsigma(k_0),\varsigma(k_0-1),\omega)\cdot e_i = \\
&= \exp(\Gamma(\omega)(\varsigma(k+1) - \varsigma(k)))\cdot\ldots\times \\
&\times \exp(\Gamma(\omega)(\varsigma(k_0) - \varsigma(k_0-1)))\cdot e_i = \\
&= \exp(\gamma_i(\varsigma(k+1) - \varsigma(k)))\cdot\ldots\times \\
&\times \exp(\gamma_i(\varsigma(k_0) - \varsigma(k_0-1)))\cdot e_i = \\
&= \exp((i+\delta)\cdot(3^{k+1} + 3^k + \ldots + 3^{k_0+1} + 3^{k_0}))\cdot e_i = \\
&= \exp\left(\frac{(i+\delta)\cdot 3^{k_0}}{2}(3^{k-k_0+2} - 1)\right)\cdot e_i,\ i = \overline{1,n}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\ln\|\widetilde{x}_i(\varsigma(k+1))\|}{\varsigma(k+1) - \varsigma(k_0 - 1)} = i + \delta, \quad i = \overline{1,n}.$$

Отсюда

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln\|\widetilde{x}_i(\varsigma(k+1))\|}{\varsigma(k+1) - \varsigma(k_0 - 1)} = i + \delta, \quad i = \overline{1,n}.$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned}
&\tilde{x}_i(\varsigma(k)) = X(\varsigma(k),\varsigma(k-1),\omega)\times \\
&\times X(\varsigma(k-1),\varsigma(k-2),\omega)\cdot\ldots\cdot X(\varsigma(k_0+1),\varsigma(k_0),\omega)\times \\
&\times X(\varsigma(k_0),\varsigma(k_0-1),\omega)\cdot e_i = \\
&= \exp(\Gamma(\omega)(\varsigma(k) - \varsigma(k-1)))\cdot\ldots\times \\
&\times \exp(\Gamma(\omega)(\varsigma(k_0) - \varsigma(k_0-1)))\cdot e_i = \\
&= \exp(\gamma_i(\varsigma(k) - \varsigma(k-1)))\cdot\ldots\times \\
&\times \exp(\gamma_i(\varsigma(k_0) - \varsigma(k_0-1)))\cdot e_i = \\
&= \exp((i+\delta)\cdot(3^k + 3^k + \ldots + 3^{k_0+1} + 3^{k_0}))\cdot e_i = \\
&= \exp\left(\frac{(i+\delta)\cdot 3^{k_0}}{2}(3^{k-k_0+1} - 1)\right)\cdot e_i,\ i = \overline{1,n}.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{\ln\|\widetilde{x}_i(\varsigma(k))\|}{\varsigma(k) - \varsigma(k_0 - 1)} = i + \delta, \quad i = \overline{1,n}.$$

Отсюда

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln\|\widetilde{x}_i(\varsigma(k))\|}{\varsigma(k) - \varsigma(k_0 - 1)} = i + \delta, \quad i = \overline{1,n}.$$

Применяя те же рассуждения, что и предыдущем пункте, получим, что при $\omega \in \sigma_2$ $\overline{\lambda}_i = i + \delta$, $(i = \overline{1,n})$ есть характеристические показатели нормального базиса системы (2), а следовательно, после перенумерации по убыванию, показатели Ляпунова той же системы.

В силу теоремы 29.2.1 из [1] для любого $d > 0$ существует система

$$\dot{x} = \widetilde{A}(t,\omega) \cdot x \qquad (11)$$

с непрерывно дифференцируемой на R^+ матрицей

$$\widetilde{A}(t,\omega) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \widetilde{a}_0(t,\omega) & \widetilde{a}_1(t,\omega) & \widetilde{a}_2(t,\omega) & \dots & \widetilde{a}_{n-1}(t,\omega) \end{pmatrix}$$

Обладающей тем свойством, что всякое решение системы (2) аналогично некоторому решению системы (11), причем их отклонение есть величина $o(e^{-dt})$ при $t \to \infty$, $(d > 0)$. Как следует из доказательства теоремы 29.2.1 такое построение достаточно проделать для каждого коэффициента матрицы $A(t,\omega)$, в данном случае для $a_0(t,\omega), a_1(t,\omega), \dots, a_{n-1}(t,\omega)$.

Тем самым установлено, что существует система (2) с коэффициентами из C^+ такая, что функции $\lambda_i(\omega)$, $(i = \overline{1,n})$ разрывны в каждой точке интервала (0,1]. Поэтому они принадлежат второму классу Бэра. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.

2. *Бэр Р.* Теория разрывных функций. М., 1932.

3. *Миллионщиков В.М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, №8. С. 1408-1416.

4. *Рахимбердиев М.И.* О Бэровском классе показателей Ляпунова // Математические заметки. 1982. Т. 31, вып. 6. С. 925-931.

5. *Рахимбердиев М.И., Дауылбаев А.М.* О Бэровском классе показателей Ляпунова линейных дифференциальных уравнений // Математический журнал РК. 2002. Т. 2, №2. С. 57-60.

6. *Султанбекова А.О.* О характере зависимостей показателей Ляпунова от линейного параметра линейного дифференциального уравнения второго параметра // Математический журнал РК. 2006. Т. 6, №1(19). С. 91-95.

7. *Султанбекова А.О.* Показатели Ляпунова линейного дифференциального уравнения второго порядка как функции линейного параметра // Математический журнал РК. 2006. Т. 6, №4(22). С. 102-106.

8. *Рахимбердиев М.И., Султанбекова А.О.* О свойствах показателей Ляпунова линейных дифференциальных уравнений второго порядка как функций линейного параметра // Математический журнал РК. 2008. Т. 8, №2(28). С. 91-94.

9. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М., 1937.

Резюме

Бір көрсеткіштік *n*-ші ретті сызықтық дифференциалды теңдеу Ляпуновтың анықтауы бойынша функция көрсеткіштері зерттелді.

Summary

The Lyapunov's exponents of one-parametrical family of linear differential equations of *n*-order as a functions of parameter are investigated.

УДК: 517.938

Институт математики *Поступила 2.06.08г.*