А. Н. ТЮРЕХОДЖАЕВ, А. Г. ИБРАЕВ

ВЛИЯНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО СОСТАВА НА ПРОДОЛЬНОЕ КОЛЕБАНИЕ РЕЛЬСА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ, ЛЕЖАЩЕГО НА ШПАЛАХ

В общем случае динамика подобного рода задач описывается нелинейным дифференциальным уравнением Никитина–Тюреходжаева [1–3]:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial t}+\chi\left(\frac{\partial u}{\lambda\partial t}\Big/\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big/\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|\right)\tau_d=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}=E\frac{\partial v}{\partial x},$$

где τ_d – величина, связанная с контактным сухим трением; σ – напряжение; v_0 – скорость железнодорожного состава; u – смещение поперечного сечения стержня; χ – функция, принимающая значение sign(v) при движении, а в покое – любое значение в диапазоне (-1;1), которое устанавливается в процессе решения задачи.

Бегущие сосредоточенные нагрузки, моделирующие движение железнодорожного состава с сухим трением на контакте «колесо–рельс», учитываются как локализованные продольные силы, направленные в сторону движения по рельсу, который рассматривается как упругий стержень.

При набегании колеса на начало рельса происходит удар о его торец. Взаимодействие колес шестиосного вагона подвижного состава с рельсами определяется следующей динамической нагрузкой:

$$\begin{aligned}F(x,t)=\frac{\tau_k}{EF}\sum_{k=0}^{n}\{&\delta[v_0t-x-k(4l_1+l_2+l_3)]+\delta[v_0t-x-l_1-k(4l_1+l_2+l_3)]+\\&+\delta[v_0t-x-2l_1-k(4l_1+l_2+l_3)]+\delta[v_0t-x-2l_1-l_2-k(4l_1+l_2+l_3)]+\\&+\delta[v_0t-x-3l_1-l_2-k(4l_1+l_2+l_3)]+\delta[v_0t-x-4l_1-l_2-k(4l_1+l_2+l_3)]\},\end{aligned} \tag{2}$$

где τ_k – величина, связанная с контактным сухим трением качения; l_1, l_2, l_3 – расстояние между колесами; n – количество вагонов; E – модуль упругости; F – площадь поперечного сечения рельса; $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака; v_0 – скорость вагона.

При взаимодействии колес шестиосных вагонов подвижного состава с рельсами, лежащего на шпалах, нелинейное уравнение (1) с учетом (2) запишется в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{m}\alpha u(t,x_i)\delta\left(t-\frac{x_i}{a}\right)=\frac{\tau_k}{EF}\sum_{k=0}^{n}\{&\delta[v_0t-x-k(4l_1+l_2+l_3)]+\\&+\delta[v_0t-x-2l_1-k(4l_1+l_2+l_3)]+\delta[v_0t-x-2l_1-l_2-k(4l_1+l_2+l_3)]+\\&+\delta[v_0t-x-3l_1-l_2-k(4l_1+l_2+l_3)]+\delta[v_0t-x-4l_1-l_2-k(4l_1+l_2+l_3)]\},\end{aligned} \tag{3}$$

где $\alpha u(t, x_i)$ – упругое смещение i-й шпалы.

Последний член левой части уравнения (3) описывает вклад шпал в динамику системы «рельс – железнодорожный состав»; m – общее количество шпал.

Уравнение (3) решатся совместно с начальными

$$t=0:\ u(0,x)=0;\ \frac{\partial u(0,x)}{\partial x}=0 \tag{4}$$

и граничными

$$x=0,\ \ \sigma(t,0)=E\frac{\partial u(t,0)}{\partial x}=-\sigma_0\delta(t)-\sigma_0\sum_{k=1}^{n}\left[\delta\left(t-\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+\right.$$

$$+\delta\left(t-\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+\delta\left(t-\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+\delta\left(t-\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$\left.+\delta\left(t-\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+\delta\left(t-\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)\right],$$

$$x=L;\ \sigma(t,L)=0 \tag{5}$$

условиями, где σ_0 – напряжение от удара колес на торце x=0, L – длина рельса.

Воспользовавшись интегральным преобразованием Лапласа–Карсона, запишем задачу (3)–(5) в изображениях:

$$\frac{d^2\bar{u}(p,x)}{dx^2}-\frac{p^2}{a^2}\bar{u}(p,x)=\frac{\alpha\cdot p}{a}\sum_{i=1}^{m}\bar{u}(p,x_i)e^{-p\frac{x_i}{a}}-\frac{\tau_k}{EF}\sum_{k=0}^{n}\frac{p}{v_0}\left[e^{-p\frac{x+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+\right.$$

$$+e^{-p\frac{x+l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{x+2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{x+2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+$$

$$\left.+e^{-p\frac{x+3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{x+4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}\right], \tag{6}$$

$$t=0;\ \bar{u}(0,p)=0;\ \frac{d\bar{u}(p,x)}{dx}=0, \tag{7}$$

$$x=0;\ \frac{\partial\bar{u}(p,0)}{\partial x}=-\frac{\sigma_0}{E}\cdot p-\frac{\sigma_0}{E}\cdot p\sum_{k=1}^{n}\left[e^{-p\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+\right.$$

$$\left.+e^{-p\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}\right], \tag{8}$$

$$x=L;\ \frac{\partial u(p,L)}{\partial x}=0. \tag{9}$$

Общее решение задачи в изображениях будет:

$$\bar{u}(p,x)=c_1e^{-\frac{x}{a}p}+c_2e^{\frac{x}{a}p}+\tilde{u}(p,x). \tag{10}$$

Из общего решения в изображениях, применяя к (10) метод неопределенных коэффициентов Лагранжа, получаем:

$$\bar{u}(p,x)=c_1e^{-\frac{x}{a}p}+c_2e^{\frac{x}{a}p}-\frac{\tau_k a^2 v_0}{EF(a^2-v_0^2)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p}\left[e^{-p\frac{x+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{x+l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+\right.$$

$$\left.+e^{-p\frac{x+2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{x+2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{x+3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{x+4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}\right]+$$

$$+\alpha\cdot a\sum_{i=1}^{m}\bar{u}(p,x_i)\frac{1}{p}e^{-\frac{p}{a}x_i}. \tag{11}$$

Использование граничных условии задачи дает:

$$\bar{u}(p,x)=\frac{\tau_k a^3}{EF\left(a^2-v_0^2\right)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p}\left[\frac{e^{-p\frac{x-L}{a}}+e^{p\frac{x-L}{a}}+e^{-p\frac{L}{v_0}}\left(e^{-p\frac{x}{a}}-e^{p\frac{x}{a}}\right)}{e^{p\frac{L}{a}}-e^{-p\frac{L}{a}}}-\frac{v_0}{a}e^{-p\frac{x}{v_0}}\right]\times$$

$$\times\left[+e^{-p\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+\right.$$

$$\left.+e^{-p\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}\right]+\frac{\sigma_0\cdot a}{E}\cdot\frac{e^{-p\frac{x-L}{a}}+e^{p\frac{x-L}{a}}}{e^{p\frac{L}{a}}+e^{-p\frac{L}{a}}}\times$$

$$\times\left\{1+\sum_{k=1}^{n}\left[e^{-p\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+e^{-p\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}\right]\right\}+\alpha a\sum_{i=1}^{m}\bar{u}(p,x_i)\frac{1}{p}e^{-\frac{p}{a}x_i}. \qquad (12)$$

Разлагая решение в изображениях по бегущим волнам, будем иметь:

$$\bar{u}(p,x)=\alpha\cdot a\sum_{i=1}^{m}\bar{u}(p,x_i)\frac{1}{p}e^{-\frac{p}{a}x_i}+$$

$$+\frac{\tau_k a^3}{EF\left(a^2-v_0^2\right)}\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=0}^{s}\frac{1}{p}e^{-\frac{(2r+1)L}{a}p}\left[e^{-p\frac{x-L}{a}}+e^{p\frac{x-L}{a}}-e^{-p\left(\frac{x}{a}+\frac{L}{v_0}\right)}-e^{p\left(\frac{x}{a}-\frac{L}{v_0}\right)}\right]\times$$

$$\times\left[e^{-p\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+\right.$$

$$\left.+e^{-p\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}\right]-\frac{\tau_k a^2 v_0}{EF\left(a^2-v_0^2\right)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p}\left[e^{-p\frac{x+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{x+l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+\right.$$

$$\left.+e^{-p\frac{x+2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{x+2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{x+3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{x+4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}\right]+$$

$$+\frac{\sigma_0\cdot a}{E}\sum_{r=0}^{s}\left(e^{-p\frac{x+2rL}{a}}+e^{p\frac{x-2(r+1)L}{a}}\right)+\frac{\sigma_0\cdot a}{E}\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=0}^{s}\left[-p\frac{x+2rL}{a}+e^{p\frac{x-2(r+1)L}{a}}\right]\times$$

$$\times\left[e^{-p\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+\right.$$

$$\left.+e^{-p\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}\right]. \qquad (13)$$

Введем обозначение:

$$f(p,x)=\frac{\tau_k a^3}{EF\left(a^2-v_0^2\right)}\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=0}^{s}\frac{1}{p}\left[e^{-p\left(\frac{x+2rL}{a}+\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{x+2rL}{a}+\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+\right.$$

$$e^{-p\left(\frac{x+2rL}{a}+\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{x+2rL}{a}+\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{x+2rL}{a}+\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+$$

$$+e^{-p\left(\frac{x+2rL}{a}+\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{-x+2rL+2L}{a}+\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{-x+2rL+2L}{a}+\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+$$

$$+e^{-p\left(\frac{-x+2rL+2L}{a}+\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{-x+2rL+2L}{a}+\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{-x+2rL+2L}{a}+\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+$$

$$+e^{-p\left(\frac{-x+2rL+2L}{a}+\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}-e^{-p\left(\frac{x+(2r+1)L}{a}+\frac{L+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}-e^{-p\left(\frac{x+(2r+1)L}{a}+\frac{L+l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}-$$

$$-e^{-p\left(\frac{x+(2r+1)L}{a}+\frac{L+2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}-e^{-p\left(\frac{x+(2r+1)L}{a}+\frac{L+2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}-e^{-p\left(\frac{x+(2r+1)L}{a}+\frac{L+3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}-$$

$$-e^{-p\left(\frac{x+(2r+1)L}{a}+\frac{L+4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}-e^{-p\left(\frac{-x+(2r+1)L}{a}+\frac{L+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}-e^{-p\left(\frac{-x+(2r+1)L}{a}+\frac{L+l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}-$$

$$-e^{-p\left(\frac{-x+(2r+1)L}{a}+\frac{L+2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}-e^{-p\left(\frac{-x+(2r+1)L}{a}+\frac{L+2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}-$$

$$\left.-e^{-p\left(\frac{-x+(2r+1)L}{a}+\frac{L+3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}-e^{-p\left(\frac{-x+(2r+1)L}{a}+\frac{L+4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}\right]-$$

$$-\frac{\tau_k a^2 v_0}{EF\left(a^2-v_0^2\right)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p}\left[e^{-p\frac{x+k}{v_0}}+e^{-p\frac{x+l_1+k}{v_0}}+e^{-p\frac{x+2l_1+k}{v_0}}+e^{-p\frac{x+2l_1+l_2+k}{v_0}}+e^{-p\frac{x+3l_1+l_2+k}{v_0}}+\right.$$

$$\left.+e^{-p\frac{x+4l_1+l_2+k}{v_0}}\right]+\frac{\sigma_0\cdot a}{E}\sum_{r=0}^{s}\left(e^{-p\frac{x+2rL}{a}}+e^{p\frac{x-2(r+1)L}{a}}\right)-\frac{\sigma_0\cdot a}{E}\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=0}^{s}\left[e^{-p\left(\frac{x+2rL}{a}+\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+\right.$$

$$+e^{-p\left(\frac{x+2rL}{a}+\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{x+2rL}{a}+\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{x+2rL}{a}+\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+$$

$$+e^{-p\left(\frac{x+2rL}{a}+\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{x+2rL}{a}+\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+$$

$$+e^{p\left(\frac{x-2(r+1)L}{a}-\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{p\left(\frac{x-2(r+1)L}{a}-\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{p\left(\frac{x-2(r+1)L}{a}-\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+ \qquad (14)$$

$$\left.+e^{p\left(\frac{x-2(r+1)L}{a}-\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{p\left(\frac{x-2(r+1)L}{a}-\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{p\left(\frac{x-2(r+1)L}{a}-\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}\right].$$

Решение (13) компактно представим в виде:

$$\bar{u}(p,x)=f(p,x)+\alpha\cdot a\sum_{i=1}^{m}\bar{u}(p,x_i)\frac{1}{p}e^{-\frac{p}{a}x_i}. \qquad (15)$$

Оригинал Ф(t,x) функции $f(p,x)$ запишем в виде:

$$\Phi(t,x)=\frac{\tau_k a^3}{EF\left(a^2-v_0^2\right)}\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=0}^{s}\left[\left(t-\frac{x+2rl}{a}-\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x+2rl}{a}-\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+\right.$$

$$+\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2rL}{a}-\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2rL}{a}-\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$+\left(t-\frac{x+2rL}{a}-\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x+2rL}{a}-\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$+\left(t-\frac{x+2rL}{a}-\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x+2rL}{a}-\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$+\left(t-\frac{x+2rL}{a}-\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x+2rL}{a}-\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$+\left(t-\frac{x+2rL}{a}-\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x+2rL}{a}-\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$+\left(t+\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t+\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$+\left(t+\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t+\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$+\left(t+\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t+\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$+\left(t+\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t+\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$+\left(t+\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t+\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$+\left(t+\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t+\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)-$$

$$-\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{L+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{L+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)-$$

$$-\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{L+l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{L+l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)-$$

$$-\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{L+2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{L+2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)-$$

$$-\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}+\frac{L+2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}+\frac{L+2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)-$$

$$-\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{L+3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{L+3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)-$$

$$-\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{L+4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{L+4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)-$$

$$-\left(t+\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{L+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t+\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{L+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)-$$

$$-\left(t+\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{L+l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t+\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{L+l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)-$$

$$-\left(t+\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{L+2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t+\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{L+2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)-$$

$$-\left(t+\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{L+2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t+\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{L+2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)-$$

$$-\left(t+\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{L+3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t+\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{L+3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)-$$

$$-\left(t+\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{L+4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t+\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{L+4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)\Bigg]\Bigg]+$$

$$+\frac{\sigma_0\cdot a}{E}\sum_{r=0}^{s}\left[H\left(t-\frac{2rL}{a}\right)+H\left(t+\frac{2(r+1)L}{a}\right)\right]+$$

$$+\frac{\sigma_0\cdot a}{E}\sum_{k=1}^{n}\sum_{z=0}^{s}\left[H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2rL}{a}-\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2rL}{a}-\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+\right.$$

$$+H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2rL}{a}-\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2rL}{a}-\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$+H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2rL}{a}-\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2rL}{a}-\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$+H\left(t+\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+H\left(t+\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+ \quad (16)$$

$$+H\left(t+\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+H\left(t+\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$+H\left(t+\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+H\left(t+\frac{x}{a}-\frac{2(r+1)L}{a}-\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)\Bigg].$$

Запишем решения в оригиналах для нескольких выражений $\bar{u}(p,x_i)$

$$u(t,x_1)=\Psi(t,x_1), \quad (17)$$

$$u(t,x_2)=\Psi(t,x_2)+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\alpha\cdot a)^{i+1}}{(j+1)!}\Psi(t,x_1,(j+1)x_2), \quad (18)$$

$$u(t,x_3)=\Psi(t,x_3)+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\alpha\cdot a)^{i+1}}{(j+1)!}[\Psi(t,x_1,x_1+mx_3)+\Psi(t,x_2,x_2+jx_3)]+$$

$$+\sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{(\alpha\cdot a)^{i+1}}{(j+1)!}\right]^2\Psi(t,x_1,x_1+x_2+j(x_2+x_3)). \quad (19)$$

Методом математической индукции удается записать выражение $u(t,x_i)$ для общего случая

$$u(t,x_i)=\Psi(t,x_i)+\sum_{g=0}^{i-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\alpha\cdot a)^{j+1}}{(j+1)!}\Psi(t,x_g,x_g+jx_g)+\sum_{g=2}^{i-2}\sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{(\alpha\cdot a)^{j+1}}{(j+1)!}\right]^g\times$$

$$\times\Psi(t,x_{g-1},(j+1)x_g^{i-2})+\sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{(\alpha\cdot a)^{ij1}}{(j+1)!}\right]^{i-1}\Psi\left(t,x_1,\sum_{g=1}^{i-1}(j+1)x_g\right), \quad (20)$$

где $\Psi(t,x_i)$ – оригинал функции $(\alpha a/p)^j\exp(-jx_ip/a)f(p,x_i)$, полученный в процессе последовательного интегрирования и учета теоремы запаздывания [4], x_g^{i-2} – сумма сочетаний g элементов из множества элементов $x_1,x_2,...,x_{i-2}$.

Таким образом, решение поставленной задачи в окончательном виде примет вид:

$$u(t,x)=\Phi(t,x)+\sum_{i=1}^{m}u(t,x_i), \quad (21)$$

где $u(t,x_i)$ определяется формулой (23).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nikitin L.V., Tyurehodgaev A.N.* Wave Propagation and Vibration of Elastic Rods with Interfacial Frictional Slip. Wave Motion 12 (1990) 513-526 North-Holland.

2. *Nikitin L.V., Tyurehodgaev A.N.* Defor d'un pipeline souterrain sous l'action de l'onde sismique. Deformation of the Underground Pipeline under Action of Seismic Wave. XIIth European Conference of Soil Mechanics and Geotechnical Engineering. 7-10 June 1999 Amsterdam, the Netherlands.

3. *Никитин Л.В., Тюреходжаев А.Н.* Воздействие ударной волны в грунте на подземный трубопровод // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. 1987. №1. С. 98-106.

4. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., 1965.

Резюме

Ұзындығы шектелген шпалдарда жатқан рельске, тұрақты қозғалыстағы теміржол құрамасының доңғалағы мен рельс арасындағы құрғақ үйкелісті ескере отырып, рельстің бойлық тербелістерін қарастырып, оның аналитикалық шешімі алынған.

Summary

Solution of the problem about longitudinal vibration of the rail in railway motion which consists of six-axis van and lies on ties taking into account dry friction on the "wheel-rail" contact are provided.

КазНТУ им. К. И. Сатпаева,
г. Алматы

Поступила 2.04.06г.