Л. П. ФАЛАЛЕЕВ

О ПОРЯДКАХ УБЫВАНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ РАЗЛИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Найдены оценки порядков убывания коэффициентов Фурье по тригонометрической системе функций из пространств С. Л. Соболева, С. М. Никольского, О. В. Бесова $(p \geq 2)$. Сходимость последовательности понимается при этом в смысле Чезаро, Рисса или Зигмунда. Результаты данной работы анонсированы в [2, 3].

Напомним, что 2π -периодическая функция

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

принадлежит пространству С. М. Никольского $H_p^{(r)}$, $2 \leq p \leq \infty$, $r = \bar{r} + \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, $\bar{r} \geq 0$ целое число, если $f(x)$ имеет $\bar{r}$ -ю производную такую, что $f^{(\bar{r})} \in L_p$, $p \geq 2$ и

$$\left\| f^{(\bar{r})}(x+h) - 2f^{(\bar{r})}(x) + f^{(\bar{r})}(x-h) \right\|_p \leq |h|^{\alpha},$$

причем в этом неравенстве для $0 < \alpha < 1$ вторую разность можно заменить первой.

А. Ф. Тиман и М. Ф. Тиман в 1950 г. показали (см. также [1]), что если $f(x) \in H_p^{(r)}$, то ее коэффициенты Фурье необходимо удовлетворяют условию

$$\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0\left(\frac{1}{n^r} \right), \quad 2 \leq p \leq \infty. \qquad (1)$$

Причем это условие не уточняемо на всем классе $H_p^{(r)}$.

Определим, каков порядок стремления к 0 коэффициентов Фурье функций из классов $H_p^{(r)}$, если сходимость последовательности понимать в смысле Λ-методов суммирования (Чезаро, Рисс, Зигмунд).

Теорема 1. Для Λ-методов при $\alpha > \frac{1}{2}$ справедлива оценка $(n \to \infty)$ $n^{\beta}|c_n| = \bar{\bar{0}}(1)$, $\beta \in \left(r - \frac{1}{2}, \quad r + \frac{1}{2} \right)$.

Доказательство. Воспользуемся асимптотикой чисел Чезаро

$$A_n^{\alpha} \approx c \cdot n^{\alpha}, \quad n \to \infty, \quad \alpha > -1, \quad c > 0, \quad c = const.$$

В силу неравенства Гельдера и условия (1) имеем

$$A_n^{-\alpha}\sum_{k=1}^{n}A_{n-k}^{\alpha-1}|c_k|\cdot k^{\beta}\le$$

$$\le c\cdot n^{-\alpha}\left\{\sum_{k+1}^{n}|c_k|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}A_{n-k}^{(\alpha-1)2}\cdot k^{2\beta}\right\}^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le c\cdot n^{-\alpha}\left(c+0\left(n^{-r}\right)\right)\left(\sum_{k=1}^{n}A_{n-k}^{2(\alpha-1)}\cdot k^{2\beta}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=c\cdot n^{\beta-r-\frac{1}{2}}\to 0 \text{ при } \beta<r+\frac{1}{2}.$$

Использованные выкладки применимы при следующих необходимых условиях, накладываемых на параметры α, β, r:

$$\begin{cases}\beta>r-1+\frac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta>r-\frac{1}{2},\\ \alpha>\frac{1}{2}.\end{cases}\\ 2\alpha-2>-1\end{cases}$$

Будем говорить, что 2π-периодическая функция $f(x)$ принадлежит пространству С. Л. Соболева $W_p^{(r)}$, где $1\le p<\infty$, $r>0$, если ее среднее значение на периоде равно 0: $\int_0^{2\pi}f(x)dx=0$, имеет r-ю производную в смысле Вейля, принадлежащую L_p: $f^{(r)}(x)\in L_p$.

Для $f(x)\in W_p^{(r)}$ установлено (см. [1]), что коэффициенты Фурье необходимо удовлетворяют условию

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2 k^{2r}<\infty \qquad (2)$$

(эта оценка также неуточняема на всем классе $W_p^{(r)}$).

Теорема 2. На классе $W_p^{(r)}$ $2\le p<\infty$ для Λ-методов при $\alpha>\frac{1}{2}$ справедлива оценка $(n\to\infty)$

$$n^{\beta}|c_n|=\overline{\overline{0}}(1),\quad \beta\in\left(r-\frac{1}{2},\ r+\frac{1}{2}\right).$$

Доказательство. Образуем суммы Чезаро и воспользуемся неравенством (2)

$$A_n^{-\alpha}\sum_{k=1}^{n}A_{n-k}^{\alpha-1}|c_k|\cdot k^{\beta}=c\cdot n^{-\alpha}\sum_{k=1}^{n}|c_k|\cdot A_{n-k}^{\alpha-1}\cdot k^{\beta}=$$

$$=c\cdot n^{-\alpha}\sum_{k=1}^{n}|c_k|\cdot k^{r}A_{n-k}^{\alpha-1}\cdot k^{\beta-r}\le$$

$$\le c\cdot n^{-\alpha}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2\cdot k^{2r}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{k=1}^{n}A_{n-k}^{(\alpha-1)2}\cdot k^{(\beta-r)2}\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=c\cdot n^{-\alpha}\left[n^{2\alpha-2+2\beta-2r+1}\right]=c\cdot n^{\beta-r-\frac{1}{2}}\to 0$$

$$\text{при } \beta<r+\frac{1}{2}.$$

Другие ограничения на параметры α, β, r получены из соотношения

$$A_n^{\alpha+\beta+1}=\sum_{k=1}^{n}A_{n-k}^{\alpha}A_k^{\beta},$$

справедливого при α, β, $\alpha+\beta>-1$:

$$2(\alpha-1)>-1,$$
$$2(\beta-r)>1,$$
$$2(\alpha-1)+2(\beta-r)>-1,$$

чем завершается доказательство теоремы.

Рассмотрим класс О. В. Бесова $B_p^{(r)}$. 2π-периодическая функция $f(x)\in B_p^{(r)}$, $1\le p<\infty$, $r=\bar{r}+\alpha$, $0<\alpha\le 1$, $\bar{r}>0$ целое число, если $f(x)$ имеет $\bar{r}$-ю производную $f^{(\bar{r})}(x)\in L_p$ и, кроме того,

$$\int_0^1 t^{-\alpha p-1}\omega_{1+[\alpha]}f^{(\bar{r})}(t)_p\,dt<\infty,$$

где

$$\omega_k(\varphi,t)=\sup_{|h|\le t}\left\|\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}c_n^k\varphi(x+kh)\right\|_p.$$

Определим порядки стремления к 0 коэффициентов Фурье функций из B-пространств. Сходимость последовательности будем понимать в смысле Λ-методов. Для простоты изложения доказательство теоремы будем проводить для метода Чезаро. Для методов Рисса и Зигмунда оно аналогично (см. [4 и 5]).

Теорема 3. На классе $B_p^{(r)}$, $2\le p<\infty$ для Λ-методов при $\alpha>\frac{1}{2}$ справедлива оценка $(n\to\infty)$

$$n^{\beta}|c_n| = \overline{\overline{0}}(1), \quad \beta \in \left(r - \frac{1}{2}, \quad r + \frac{1}{2}\right).$$

Доказательство. В работе [1] показано, что коэффициенты Фурье функции из пространства $B_p^{(r)}$ при $2 \le p < \infty$ необходимо удовлетворяют условию

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (c\ ) \cdot k^{2r} \varphi^{\frac{2-p}{2}} (|k|+1) < \infty, \qquad (3)$$

где $\varphi(n) \le \varphi(n+1)$, $n = 1,2,\ldots$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n\varphi(n)} < \infty$,

при этом $\varphi(n)$ нельзя заменить ни 1, ни ℓnn.

Несложно провести следующие выкладки, используя неравенство Гельдера и неравенство (3):

$$c \cdot n^{-\alpha} \sum_{k=1}^{n} |c_k| A_{n-k}^{\alpha-1} \cdot k^{\beta} = c \cdot n^{-\alpha} \sum_{k=1}^{n} |c_k| \cdot k^{r} A_{n-k}^{\alpha-1} \cdot k^{\beta} \times$$

$$\times k^{-\Gamma} \varphi^{\frac{2-p}{4}} (k+1) \cdot \varphi^{\frac{p-2}{4}} (k+1) \le$$

$$\le c \cdot n^{-\alpha} \left[\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \cdot k^{2r} \cdot \varphi^{\frac{2-p}{2}} (k+1) \right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left[\sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{(\alpha-1)2} \cdot k^{(\beta-r)2} \cdot \varphi^{\frac{p-2}{2}} (k+1) \right]^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le c \cdot n^{-\alpha} \left[\sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{(\alpha-1)^2} \cdot k^{(\beta-r)^2} \cdot \varphi^{\frac{p-2}{2}} (k+1) \right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (4)$$

Полагая в (4) $\varphi_{(n)} = n^{\delta}$, $\delta > 0$, получаем

$$c \cdot n^{-\alpha} \sum_{k=1}^{n} |c_k| A_{n-k}^{\alpha-1} \cdot k^{\beta} \le$$

$$\le c \cdot n^{-\alpha} \left[\sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{(\alpha-1)^2} \cdot k^{(\beta-r)^2} \cdot k^{\frac{p-2}{2}} \delta + 1 \right] =$$

$$= c \cdot n^{\beta - r + \frac{p-2}{4}} \delta - \frac{1}{2} \to 0, \ n \to \infty$$

при $\beta < r + \frac{1}{2}$ в силу произвольной малости $\delta > 0$.

Дополнительные ограничения на параметры α, β, r порождены неравенствами

$$\begin{cases} 2(\alpha-1) > -1, \\ 2(\beta-r) > -1, \\ 2(\alpha-1) + 2(\beta-r) > -1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} \alpha > \frac{1}{2}, \\ \beta \in \left(r - \frac{1}{2}, r + \frac{1}{2}\right). \end{matrix}$$

Теорема доказана полностью. Доказательство сформулированных теорем для методов Рисса и Зигмунда аналогично (см. [4 и 5]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Потапов М.К.* О коэффициентах Фурье // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. Баку, 1965. С. 475-483.

2. *Фалалеев Л.П.* О поведении коэффициентов Фурье функций из различных пространств // Международная конф. «Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ» (Москва. 23-29 мая 2005 г.), посвященная столетию Сергея Михайловича Никольского (родился 30.04.1905 г.). Тезисы докладов. С. 233.

3. *Фалалеев Л.П.* О порядке убывания коэффициентов Фурье // Международная конф. «Современные проблемы математики, механики, информатики», посвященная 75-летию ТулГУ и 85-летию со дня рождения профессора С. Б. Стечкина. Тула, 2005.

4. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М., 1951. 505 с.

5. *Фалалеев Л.П.* О точных константах для матричных методов суммирования // Сиб. матем. журнал. 1995. Т. 36, № 4. С. 927-933.

Резюме

С. М. Никольский, С. Л. Соболев, О. В. Бесов кеңістіктерінен алынған функциялардың кему реті бағаланған. Мұнда тізбектің жинақталуы Фурье коэффициенттерінің Чезаро мағынасында берілген.

Summary

The asymptotic behavior of Fourier coefficients of functions from the Nikilskii, Sobolev and Besov spaces is obtained. The sequence of coefficient in considered in Cesaro, Riesz, or Zygmund sence.

УДК 517.51

Институт математики
МОН РК

Поступила 23.02.06г.

Тангенциальное ускорение ограничено пределами, не зависящими от c:

$$-\omega_1^2 r(z+1) \le w_t \le \omega_1^2 r(z+1).$$

Графики безразмерных величин $\frac{w_n}{\omega_1^2 r}$ и $\frac{w_t}{\omega_1^2 r}$ при трех значениях c приведены на рис. 2.

Полученные выражения компонентов ускорения вершин ротора (1)–(7) позволяют определить на стадии проектирования строительно-дорожных машин с планетарно-роторным движением рабочих органов (роторов) основные кинематические параметры рабочих органов и рассчитать центробежные силы инерции [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Таукелев Р.Н., Ли С.В., Джумабеков А.Г.* Кинематические характеристики рабочих органов строительных, путевых и погрузочно-разгрузочных машин с планетарным движением. // Вестник КазГАСА. Алматы, 2003. № 3-4. С. 93-99.

2. *Ли С.В.* Математическая модель рабочего органа строительно-дорожной машины с планетарно-роторным движением // Известия НАН РК. Сер. физ.-мат. Алматы, 2004. № 4. С. 23-26.

Резюме

Планетарлы қозғалыстағы жол құрылысы машиналары роторларының төбесін алуды жеделдетуді анықтау үшін теориялық бағыныштылығы алынған. Ол кернеудің орталық күшін анықтауға көмектеседі.

Summary

Theoretical dependences for definition of tops of a rotor of building road machines with the planetary movement are received. Allowing to calculate centrifugal forces of inertia.

УДК 621.926.2

КазАТК

Поступила 3.06.05г.