УДК 519.21

А.К.ШАЙМЕРДЕНОВА

КазНУ имени аль-Фараби, г. Алматы

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ОДНОТИПНОГО КРИТИЧЕСКОГО ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОЦЕССА ГАЛЬТОНА-ВАТСОНА В СЛУЧАЙНЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ

В работе изучаются однотипные дробно-линейные ветвящиеся процессы. Найдены асимптотические свойства вероятности невырождения в случайный момент наблюдения в критическом случае.

Ключевые слова: вероятность невырождения, случайный момент, дробно-линейное распределение, Тауберова теорема.

Тірек сөздер: процестің тоқтамау ықтималдығы, кездейсоқ бақыланған уақыт, бөлшек-сызықты үлестірім, Таубер теоремасы.

Keywords: survival probability, random time, linear-fractional distribution, Tauberian theorem.

Введение

Рассмотрим процесс Гальтона-Ватсона с дробно-линейным законом размножения. Закон размножения частиц в популяций дается через производящую функцию. Производящая функция для дробно-линейного процесса имеет вид

$$f(s) = h_0 + h_1 \frac{s}{1+m-ms},$$

с вероятностью h_0 частица не имеет потомков, $1-h_0 = h_1 -$вероятность того, что частица будет иметь хотя бы один потомок, $m-$положительная константа.

Среднее число частиц вычисляется через производящую функцию $M = f'(1)$. Сравнивая среднее число частиц M с единицой, получим классификацию ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона:

- если $M > 1$, процесс называется надкритическим,
- если $M < 1$, процесс называется докритическим,
- если $M = 1$, процесс называется критическим.

Для дробно-линейного процесса среднее число потомков вычисляется как $M = h_1(1+m)$. Закон размножения за n поколений сохраняет свойство дробно-линейности [1].

$$f^{(n)}(s) = h_0^{(n)} + h_1^{(n)} \frac{s}{1 + m^{(n)} - m^{(n)} s}$$

где

• в надкритическом случае, когда $M > 1$, вероятность $h_1^{(n)} = \frac{M^n(1-q)}{M^n - q}$ и $1 + m^{(n)} = \frac{M^n - q}{1 - q}$,

• в докритическом случае, когда $M < 1$, вероятность $h_1^{(n)} = \frac{M^n(q-1)}{q - M^n}$ и $1 + m^{(n)} = \frac{q - M^n}{q - 1}$,

• в критическом случае, когда $M = 1$, вероятность $h_1^{(n)} = \frac{1}{1 + mn}$ и $1 + m^{(n)} = 1 + mn$, где $q = \frac{1+m}{m} h_0$ и $h_1^{(n)}$ является $\Pi(Z_n \neq 0)$ вероятностью невырождения.

Хорошо известно, что для критических процессов Гальтона-Ватсона справедлива следующая асимптотика [2].

Теорема 1 *В критическом случае, когда* $M = 1$, *если производящая функция удовлетворяет условию* $f''(1) = 2B \in (0, \infty)$, *то имеет место следующая асимптотика вероятности невырождения процесса за* n *поколений*

$$\Pi(Z_n \neq 0) \sim \frac{1}{Bn}, n \to \infty.$$

То есть имеется асимптотическое поведение вероятности невырождения за фиксированный момент наблюдений. А что если мы будем наблюдать процесс в случайное время T? Какова вероятность невырождения критического процесса Гальтона-Ватсона с дробно-линейным распределением наблюденного в случайное время?

Рассмотрим для простоты однотипный ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона с дробно-линейным распределением, так как для этого случая многие вычисления упрощаются.

Следующая теорема аналог теоремы 1 для ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона с дробно-линейным распределением

Теорема 2 *В критическом случае, когда* $M = 1$, *верна следующая асимптотика вероятности невырождения дробно-линейного процесса Гальтона-Ватсона за* n *поколений*

$$\Pi(Z_n \neq 0) \sim \frac{1}{mn}, n \to \infty.$$

Учитывая эту теорему, хотим аналогичный результат получить для вероятности невырождения дробно-линейного процесса Гальтона-Ватсона в случайный момент наблюдения.

Пусть $T \sim Geom(p)$ случайное время распределенная геометрически, т.е. $\Pi(T = n) = p(1-p)^n$. Наша цель найти асимптотические свойства вероятности невырождения дробно-линейных ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона в случайный момент наблюдения T.

Для краткости, вероятность невырождения в случайный момент наблюдения обозначим через $1-\mathsf{Q}_p$, так как зависит от параметра p. Она находится по формуле полной вероятности

$$1-\mathsf{Q}_p = \Pi(Z_T \neq 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi(T = n)\Pi(Z_T \neq 0 \mid T = n),$$

Заметим, что условная вероятность $\Pi(Z_T \neq 0 \mid T = n)$ совпадает с вероятностью невырождения $\Pi(Z_n \neq 0)$.

Дадим определение медленно меняющейся функций и приводим утверждение Тауберовой теоремы из [3]. Это утверждение нам понадобится при доказательстве теоремы.

Определение *Заданная на* $(0,\infty)$ *положительная функция* L *называется медленно меняющейся на бесконечности в том и только в том случае, когда она удовлетворяет условию*

$$\frac{\mathsf{L}(tx)}{\mathsf{L}(t)} \to 1$$

при $t \to \infty$, для любого $x > 0$.

Теорема 3 *Пусть* $a_n \geq 0$, *и пусть* $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ *сходится при* $0 \leq s < 1$. *Если* L *медленно меняется на бесконечности и* $0 \leq \rho < \infty$, *то каждое из двух соотношений*

$$F(s) \sim \frac{1}{(1-s)^{\rho}} \mathsf{L}\left(\frac{1}{1-s}\right), s \to 1- \tag{1}$$

и

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n \sim \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} n^{\rho} L(n), n \to \infty \qquad (2)$$

влечет другое.

Далее, если последовательность a_n монотонна и $0 < \rho < \infty$, то (1) равносильно соотношению

$$a_n \sim \frac{1}{\Gamma(\rho)} n^{\rho-1} L(n), n \to \infty.$$

Основной результат для критического процесса

Теорема 4 *Вероятность невырождения критического дробно-линейного ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона в случайный момент наблюдений удовлетворяет соотношению*

$$1 - Q_p \sim \frac{1}{m} p \ln p^{-1}, p \to 0.$$

Доказательство Теоремы 4:

Эту теорему будем доказывать с помощью Тауберовой теоремы. Вероятность невырождения за n поколения в критическом случае

$$\Pi(Z_n \neq 0) = \frac{1}{1+mn}.$$

Учитывая это получим формулу вероятности невырождения в случайный момент времени для критического случая

$$1 - Q_p = \Pi(Z_T \neq 0) = p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-p)^n}{1+mn}.$$

Далее, применяя Тауберову теорему получим асимптотику для вероятности невырождения $1 - Q_p$. В нашем случае, $a_n = \dfrac{1}{1+mn}, s = 1-p$. Имеем,

$$1 + \frac{1}{1+m} + \frac{1}{1+2m} + \ldots + \frac{1}{1+mn} \sim \frac{1}{m} \ln n, n \to \infty.$$

Сравнивая с (2), замечаем, что $\rho = 0,\ L(n) = \frac{1}{m}\ln n$. По утверждению теоремы 3, (2) влечет (1). Тогда имеет место

$$p\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-p)^n}{1+mn} \sim \frac{1}{m}\, p \ln p^{-1},\ p \to 0+.$$

Это завершает доказательство данной теоремы.

Из полученного результата видно, что в случайный момент наблюдения вероятность невырождения отличается от случае в теореме 2 на $\ln n$ (учитывается, что p порядка $\frac{1}{n}$). В полученном нами результате вероятность невырождения становится больше за счет $\ln n$. Почему больше? Случайный момент T меньше момента n. Значит вероятность невырождения больше. Может быть, случайный момент T больше момента n, но с маленькой вероятностью $\Pi(T > n) = (1-p)^n$ (хвост геометрического распределения). Поэтому в среднем T меньше момента n, что и делает вероятность невырождения больше.

ЛИТЕРАТУРА

1 Athreya K., Ney P. Branching processes. – London-New York-Sydney: John Wiley & Sons, 1972.
2 Ватутин В.А. Ветвящиеся процессы. – М.: МИАН, 2008.
3 Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1967. – Т. 2.

REFERENCES

1 Athreya K., Ney P. Branching processes. London-New York-Sydney: John Wiley & Sons, 1972.
2 Vatutin V.A. Vetvjashiesya prosessy. M.: MIAN, 2008 (in Russ.).
3 Feller W. Vvedenie v teoriju verojatnostei i ee prilozhenija. M.: Mir, 1967, T. 2 (in Russ.).

Резюме

А. Қ. Шаймерденова

(әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы)

КЕЗДЕЙСОҚ БАҚЫЛАНҒАН УАҚЫТТАҒЫ БІР ТИПТІ КРИТИКАЛЫҚ БӨЛШЕК-СЫЗЫҚТЫ ГАЛЬТОН-ВАТСОН ПРОЦЕСТЕРІНЕ АРНАЛҒАН АСИМПТОТИКАЛЫҚ НӘТИЖЕЛЕР

Жұмыста біртипті бөлшек-сызықты Гальтон-Вастон процестері қарастырылған. Кездейсоқ бақыланған уақыттағы процестің тоқтамау ықтималдығының асимптотикалық қасиеттері критикалық жағдайда табылған.
Тірек сөздер: процестің тоқтамау ықтималдығы, кездейсоқ бақыланған уақыт, бөлшек-сызықты үлестірім, Таубер теоремасы.

Summary

A. K. Shaimerdenova

(Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Republic of Kazakhstan)

ASYMPTOTIC RESULTS FOR SINGLE-TYPE LINEAR-FRACTIONAL GALTON-WATSON PROCESSES AT RANDOM TIME

In the paper considered single-type linear-fractional Galton-Watson processes. Asymptotic properties of survival probability at random time have been found in critical case.
Keywords: survival probability, random time, linear-fractional distribution, Tauberian theorem.