УДК 517.9

Б.Е. КАНГУЖИН, Ж.М. САРЫБАЕВА, М.Д. КОШАНОВА

КРИТЕРИИ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ ПО ВРЕМЕНИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

(Представлена академиком НАН РК Кальменовым Т. Ш.)

Изучается линейная нелокальная задача для уравнения теплопроводности. Получен критерий единственности решения. Доказательство основывается на методах теории целых функций.

Введение

В 1938 году И.Г.Петровский в работе «О проблеме Коши для систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными в области неаналитических функций» [1] ввел важный класс систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Он определил весьма широкий класс так называемых параболических систем (параболических, по Петровскому, систем) являющихся очень удачным обобщением важного в приложениях уравнения теплопроводности. Изучение этого класса систем проводилось весьма интенсивно, в результате чего многие важные вопросы теории как линейных, так и нелинейных параболических, по Петровскому, систем были выяснены с большой полнотой. Особо отметим работу С.Д.Эйдельмана [2], где доказана корректность задачи Коши для параболических, по Петровскому, систем. Методика С.Д.Эйдельмана основана на изучении свойств некоторых функций с выходом на комплексную плоскость и получением на основании этого точных оценок ее преобразования Фурье.

С физической точки зрения вместо задачи Коши эффективнее ставить условие на средние по времени.

Известно [3], что вопрос единственности для уравнения теплопроводности в неограниченных областях связан с поведением решений на бесконечности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty<x<\infty, \quad t\ge 0 \qquad (1)$$

$$u(x,0)=\varphi(x). \qquad (2)$$

Для задачи Коши класс единственности впервые получен А.Н.Тихоновым в 1935 году. Для полного изложения приведет ее формулировку.

Теорема A. (Тихонов А.Н.) Если существует решение $u(x,t)$ задачи (1) - (2), то оно единственно только тогда, когда удовлетворяет неравенству

$$|u(x,t)|\le C\exp\left(\sigma|x|^2\right), \quad x\in R, \quad t\ge 0, \qquad (3)$$

где C, σ – константы не зависящие от u.

Отметим, что класс растущих функций (3) является в некотором смысле “максимальным” для того, чтобы задача Коши для уравнения теплопроводности имела единственное решение.

В 2000 году другой И.В.Тихонов совместно с А.Ю.Поповым в работе [4] указали класс единственности нелокальной задачи для уравнения теплопроводности. В их работе рассматривается следующая задача:

$$u_t(x,t)=\Delta u(x,t), \quad \Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \qquad (4)$$

$$\int_0^T u(x,t)dt=\varphi(x), \quad x\in R^n, \quad 0\le t\le T. \qquad (5)$$

Теорема B. (Тихонов И.В., Попов А.Ю.) Пусть функция $u(x,t)$ есть решение задачи (4) - (5) при $\varphi\equiv 0$, причем

$$|u(x,t)|\le M\exp(\sigma|x|), \quad x\in R^n, \quad t\in[0,T] \qquad (6)$$

с константами M>0 и $\sigma<\sqrt{\frac{\pi}{T}}$. Тогда $u(x,t)\equiv 0$ в $R^n\times[0,T]$.

Класс единственности в теореме B существенно сузился по сравнению с теоремой A.

В настоящей статье ставится более общая (по сравнению с работой [4]) постановка нелокальной по времени задачи для уравнения теплопроводности.

Фиксируем натуральное $n \geq 1$ и вещественное число $T > 0$. Рассмотрим задачу о нахождении функции $u(x,t)$, $x = (x_1,...,x_n) \in R^n$, $0 \leq t \leq T$ из соотношений

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j^2}, \tag{7}$$

$$u(x,0) - \int_0^T u_t(x,t)\sigma(t)dt = \varphi(x), \tag{8}$$

где $\sigma(t)$ – произвольная функция из пространства $L_2[0,T]$, $\varphi(x)$ – считается заданной.

Нашей целью является доказательство единственности регулярного решения задачи (7) - (8) в классе $C^{2,1}(R^n \times (0,T)) \cap C^{0,1}(R^n \times [0,T])$.

Сначала докажем, что однородная задача всегда имеет только тривиальное решение $u(x,t) \equiv 0$. Затем изучим вопрос о существовании нетривиальных решений (7) - (8) при $\varphi \neq 0$.

Очень интересен частный случай задачи (7)-(8).

Если в (8) функция $\sigma(t)$ – кусочно-постоянная на отрезке $[0,T]$, то приходим к нелокальному граничному условию

$$\sum_{j=0}^{N} \alpha_j u\left(x, j\frac{T}{N}\right) = \psi(x) , \quad \alpha_0 \cdot \alpha_N \neq 0. \tag{9}$$

Другими словами, при $\sum_{J=0}^{N} \alpha_j = 1$ требуется найти регулярное решение уравнения теплопроводности (7) со средним значением по времени (9). Заметим, что задача (7)-(9) обобщает задачу (4)-(5). Действительно, подействуем оператором Лапласа на обе части соотношения (5), тогда получим соотношение $\Delta\int_0^T u(x,t)dt = \Delta\varphi(x)$ или $\int_0^T \Delta u(x,t)dt = \Delta\varphi(x)$. Вспоминая уравнение (4), отсюда имеем $\int_0^T u_t(x,t)dt = \Delta\varphi(x)$ или

$$\frac{1}{2}u(x,T) - \frac{1}{2}u(x,0) = \psi(x), \tag{10}$$

где $\psi(x) = \frac{1}{2}\Delta\varphi(x)$. Если положить $N = 2$, $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, то соотношения (10) представляют частный случай краевых условий (9).

Значит условия (8) и (9) являются более общими условиями, чем условие (5) из теоремы И.В.Тихонова и А.Ю.Попова.

Итак, в данном статье исследуются задачи:

Задача K. Найти класс единственности регулярного решения задачи (7)-(8).

Оказалось, что класс единственности определяется наименьшей реальной частью квадратных корней из собственных значений соответствующей спектральной задачей.

Отметим, что с задачей (7), (8) тесно связана следующая задача на собственные значения

$$y'(t) = \lambda y(t) , \quad 0 < t < T, \tag{11}$$

$$y(0) = \int_0^T y'(t)\sigma(t)dt. \tag{12}$$

Известно, что согласно работе [5] характеристическая функция

$$\Delta(\lambda) = 1 - \lambda\int_0^T e^{\lambda t}\sigma(t)dt$$

имеет счетное число нулей тогда и только тогда, когда $\sigma \neq \sigma_c$ при любом $c \in [0,T]$, где

$$\sigma_c = \begin{cases} -1 & при \quad 0 \leq t \leq c \\ 0 & при \quad c \leq t \leq T \end{cases}$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ...$ – нули аналитической функции $\Delta(\lambda)$, где каждое собственное значение λ_s имеет кратность m_s, $m_s \in N$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$, $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| \leq ...$. Нетрудно убедиться, что функция вида

$$u(x,t) = \exp\left(\operatorname{Re}\sqrt{\lambda_k}x_j + \operatorname{Re}\lambda_k t + i\left(\operatorname{Im}\sqrt{\lambda_k}x_j + \operatorname{Im}\lambda_k t\right)\right), \quad \forall j \in \{1,...,n\}$$

является решением задачи (7)-(8) при $\varphi(x) = 0$. Пусть Ω – внешний сектор. Будем считать, что $\lambda_k \in \Omega$, т.е. вне некоторого сектора с биссектрисой $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

Обозначим через $\mu_0 = \inf\left\{\left|\operatorname{Re}\sqrt{\lambda_1}\right|, \left|\operatorname{Re}\sqrt{\lambda_2}\right|, ...\right\}$. Ясно, что $\mu_0 > 0$ поскольку $\lambda_k \in \Omega$. Обозначим через E_{μ_0} класс решении задачи (7), (8), подчиненных условиям

$$|u(x,t)| \le \exp(\mu|x|), \quad x \in R^n, \ t \in [0,T], \quad (13)$$

где $\mu < \mu_0$. Сформулируем основной результат данной статьи.

Теорема. Пусть $\sigma(\cdot) \in L_2[0,T]$. Задача (7), (8) в классе E_{μ_0} имеет единственное решение тогда и только тогда, когда выполняются соотношения

$$\max \sup \sigma(t) = T, \quad \min \sup(\sigma(t)+1) = 0 \,. \ (14)$$

Обсуждение результата. Во-первых, отметим, что класс единственности решения E_{μ_0} зависит от μ_0, который имеет спектральную интерпретацию. То есть μ_0 определяется собственными значениями спектральной задачи (11), (12).

Во-вторых, соотношения (14) эквивалентны полноте в функциональном пространстве $L_2[0,T]$ системы собственных и присоединенных функций сопряженной задачи к задаче (11), (12). Иначе говоря, критерием единственности решения задачи (7), (8) служит полнота или неполнота в $L_2[0,T]$ системы собственных и присоединенных функций сопряженной задачи к задаче (11), (12).

В работе [6] сформулирован аналогичный результат для абстрактного уравнения

$$\frac{du}{dt} = Au,$$

где A – линейный оператор. Наш результат отличается тем, что изучается единственность не во всем пространстве, а в некотором под классе функции E_{μ_0}. Для удобства чтения и последующего внятного изложения доказательство разобьем на шаги.

1^0. Определим целую функцию

$$g_0(x,\lambda) = \int_0^T u(x,t) H(t,\lambda) dt,$$

где $H(t,\lambda) = \sigma(t) + \lambda \int_t^T e^{\lambda(\tau - t)} \sigma(\tau) d\tau$. Согласно соотношению $\Delta \int_0^T u(x,t) H(t,\lambda) dt = u(x,0)\Delta(\lambda) +$

$$+ \lambda \int_0^T u(x,t) H(t,\lambda) dt$$

имеем $\quad (\Delta - \lambda \mathrm{I}) g_0(x,\lambda) = \Delta(\lambda) \cdot u(x,0).$

Пусть λ_s – нуль целой функции $\Delta(\lambda)$ кратности m_s, то есть $\Delta(\lambda_s) = \Delta'(\lambda_s) = ... = \Delta^{(m_s-1)}(\lambda_s) = 0$, $\Delta^{(m_s)}(\lambda_s) \ne 0$. Тогда вытекают соотношения аналогичные соотношениям

$$\int_0^T u(x,t) h_{ks}(t) dt = 0, \ k = \overline{0, m_s - 1}, \quad s \ge 1.$$

$$\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} g_0(x,\lambda)\Big|_{\lambda_s} = 0, \ k = \overline{0, m_s - 1}, \ s \ge 1.$$

Это вытекает из того, что линейная оболочка функции $\{h_{m_s-1,s}(x), h_{m_s-2,s}(x), \dots, h_{0,s}(x)\}$ совпадает с линейной оболочкой

$$\left\{ H(x,\lambda_s), \frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial \lambda} H(x,\lambda)\Big|_{\lambda_s}, \dots, \right.$$

$$\left. \frac{1}{(m_s-1)!}\frac{\partial^{m_s-1}}{\partial \lambda^{m_s-1}} H(x,\lambda)\Big|_{\lambda_s} \right\}$$

2^0. Фиксируем точку $x \in R^n$ и образуем отношение

$$Q_0(\lambda) = \frac{g_0(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)},$$

которое определяет некоторую целую функцию от λ. Дальнейший анализ функции $Q_0(\lambda)$ основан на технике из теории целых функций. Все необходимые сведения можно найти в книгах [7], [8].

3^0. С помощью "метода частных" [8, с. 540-542, с. 606, 607] покажем, что целая функция $Q_0(\lambda)$ имеет минимальный тип при порядке единица (точнее, растут не выше первого порядка и минимального типа). В оценках используется вспомогательная функция

$$H(\theta) \equiv \frac{T}{2}(|\cos\theta| + \cos\theta) = \begin{cases} T\cos\theta, & \cos\theta \ge 0, \\ 0, & \cos\theta < 0. \end{cases}$$

Для характеристической функции $\Delta(\lambda)$ из формулы $\Delta(\lambda) = 1 - \lambda \int_0^T e^{\lambda t} \sigma(t) dt$, $\lambda \in C$ рассмотрим индикатор роста

$$h_\Delta(\theta) \equiv \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log|\Delta(re^{i\theta})|}{r}, \quad 0 \le \theta < 2\pi.$$

Свойства данного индикатора хорошо изучены (начиная с основополагающей работы [9]). Воспользуемся леммой 3 из §2 работы [10], где фигурирует функция, аналогичная $\Delta(\lambda)$ из формулы $\Delta(\lambda)=1-\lambda\int_0^T e^{\lambda t}\sigma(t)dt$, $\lambda\in C$, но с интегралом по отрезку $[-qi, qi]$ мнимой оси. С помощью элементарных преобразований сведем нужную часть этой леммы к нашей ситуации. Утверждается, что

$$h_\Delta(\theta)\equiv\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\left|\Delta\left(re^{i\theta}\right)\right|}{r}=$$

$$=\frac{T}{2}\left(|\cos\theta|+\cos\theta\right)\equiv H(\theta). \qquad (15)$$

Здесь для почти всех $\theta\in[0,2\pi)$ существует не только верхний, но и обычный предел. Оценка $h_\Delta(\theta)\le H(\theta)$ проверяется непосредственно, исходя из формулы $\Delta(\lambda)=1-\lambda\int_0^T e^{\lambda t}\sigma(t)dt$, $\lambda\in C$.

Но по условию $t=0$ и $t=T$ – точки вариации меры $d\mu(t)$. Поэтому справедливо равенство $h_\Delta(\theta)\le H(\theta)$. (Подробное доказательство см. в [10, с. 280-283] или [7, с. 106-110].)

Оценим теперь индикатор функции $g_0(\lambda)$.

Пусть $\lambda=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$. Тогда $\left|e^{\lambda_s}\right|=e^{(r\cos\theta)s}\le e^{rH(\theta)}$ при $0\le s\le T$. Отсюда $|g_0(\lambda)|\le Ce^{rH(\theta)}$ с некоторой константой C.

Это означает, что

$$h_{g_0}(\theta)\equiv\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\left|g_0\left(re^{i\theta}\right)\right|}{r}\le H(\theta)\equiv\frac{T}{2}\left(|\cos\theta|+\cos\theta\right).(16)$$

Поскольку у индикатора $h_\Delta(\theta)$ для почти всех θ существует не только верхний, но и обычный предел (15), то индикатор частного $g_0(\lambda)/\Delta(\lambda)$ равен разности соответствующих индикаторов. Учитывая (15) и (16), получаем

$$h_{Q_0}(\theta)=h_{g_0}(\theta)-h_\Delta(\theta)\le H(\theta)-H(\theta)=0.$$

Как известно [8, с. 98], тип целой функции совпадает с максимумом ее индикатора. Таким образом, функция $g_0(\lambda)$ имеет минимальный тип при порядке единица.

Отсюда видно, что целая функция минимального типа $Q_0(\lambda)$ ограничена на последовательности точек $\zeta_k=2k\pi i/T$, образующих двустороннюю арифметическую прогрессию. Согласно известной теореме Г. Полиа [11] (см. также [8, с. 269] и [12, с. 118]) такая функция может быть только константой, а точнее, нулем, ибо $Q_0(\zeta_k)\to 0$ при $k\to\infty$. Тем самым, $Q_0(\lambda)\equiv 0$ в плоскости C. Итак, при предположениях теоремы справедливо $u(x,t)\equiv 0$.

Итак, если предполагать, что ни один нуль характеристической функции $\Delta(\lambda)$ не является собственным значением оператора A, то обобщенное решение нелокальной задачи $\frac{du(t)}{dt}=Au(t)$, $\int_0^T u(t)d\mu(t)=0$ может быть только тривиальным. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петровский И.Г.* О проблеме Коши для систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл.МГУ, секция А.1938.1, вып.7.
2. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. М.: Наука, 1964. 444 с.
3. *Tychonoff A.* // Мат.сбор. 1935. Т.42. Вып. 2. С. 199-216.
4. *Тихонов И.В., Попов А.Ю.* // Экспоненциальные классы единственности в задачах теплопроводности.// Доклады РАН, 2003. Т.389.№4.С.465-467.
5. *Кожатаева М.Ж., Кангужин Б.Е.* // Доклады НАН РК, 1998, №5, С.18-23.
6. *Кангужин Б.Е.* Вычислительные аспекты биортогональных разложений. Вычислительные технологии. 2004.Е.9.С.70-75.
7. *Леонтьев А.Ф.* Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
8. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.
9. *Titchmarsh E.C.* The zeros of certain integral functions // Proc. London Math. Soc. 1926.V.25.№4P. 283-302.
10. *Леонтьев А.Ф.* О свойствах последовательностей полиномов Дирихле, сходящихся на интервальной мнимой оси. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т.29. №2. С.269-328.
11. *Крейн С.Г.* О классах корректности для некоторых граничных задач. // ДАН СССР. 1957.Т.114.№6.С.1162-1165.
12. *Хилле Э., Филипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.

Резюме

Жылу өткізгіштік теңдеуі үшін сызықты локальды емес есеп қарастырылады. Шешімнің жалғыздығының критерийі алынды. Дәлелдеуі бүтін функциялар теориясының әдістеріне негізделген.

Summary

The linear non local problem for the heat-conducting equation is studied. Is received criterion of uniqueness of the decision. The proof is based on methods of the theory of the integer functions.

МКТУ им. А. Яссауи *Поступила 2.04.2009 г.*