

M.E. АБИШЕВ

О ПРОБЛЕМЕ ОДНОЗНАЧНОСТИ УРАВНЕНИЙ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ В МЕХАНИКЕ ОТО В КОНТЕКСТЕ ЭКСПЕРИМЕНТА GRAVITY PROBE В

В работе показано, что существующая в механике ОТО неоднозначность релятивистских уравнений вращательного движения тел должна быть учтена при интерпретации экспериментальных данных.

Возможности экспериментальной проверки общей теории относительности Эйнштейна (ОТО) техническими и астрономическими методами резко возросли в последние годы в связи с появлением сверхточных приборов и высоких технологий, а также широким применением высокопроизводительных суперкомпьютеров для обработки наблюдений и экспериментальных данных.

Высокая точность измерений и расширение состава измеряемых параметров, достигнутые с помощью планетных радиолокаторов, позволили уверенно обнаружить ряд новых релятивистских эффектов, создаваемых полем Шварцшильда для Солнца и ранее не доступных для наблюдения. Однако главной проверкой ОТО является хорошее согласование опытных и расчетных данных, достигнутое при построении релятивистских теорий движения внутренних планет. Эта проверка носит глобальный характер, т. е. охва-

тывает все возможные релятивистские эффекты, создаваемые полем Шварцшильда в постньютоновом приближении, в том числе и классический эффект векового смещения перигелиев орбит.

Следующим этапом проверки и применения общей теории относительности в расчетах движения планет и спутников будет учет релятивистских эффектов ОТО, связанных с собственным вращением тел. Здесь следует указать, что недавно завершившаяся космическая программа, предпринятая учеными NASA в сотрудничестве с коллегами из Стэнфордского университета, как раз была посвящена измерению чрезвычайно слабых эффектов прецессии гироскопов на орбите вокруг Земли. Опишем более подробно эту миссию.

Уникальный в своем роде спутник, насыщенный ультрасовременными технологиями, разрабатывался NASA в течение ряда лет (начиная с 1964), общее финансирование эксперимента за четыре с лишним десятилетия составило \$760

млн. После тщательных приготовлений спутник был запущен 20 апреля 2004 года, сбор данных начал в августе 2004. На орбите спутник отработал в целом 17 месяцев и завершил свою миссию 3 октября 2005 года.

Спутник Gravity Probe B нес на борту самые точные на сегодняшний день гироскопы в мире. Точность измерений положения оси позволяет обнаружить два эффекта, предсказываемые общей теорией относительности:

1. Геодезическую прецессию, возникающую за счёт взаимодействия с гравитомагнитным полем Земли. Удачный исход данного эксперимента будет означать обнаружение земного гравитомагнитного поля.[1]

2. Прецессию за счёт увлечения инерциальной системы координат вблизи врачающегося массивного тела (Земли).

Геодезическая прецессия возникает из-за искривления пространства-времени Землей. В искривленном пространстве, если обнести вектор по замкнутому контуру, он не возвратится в исходное положение, а изменит направление на некоторый угол. В данном случае роль вектора выполняет спин гироскопа, а орбита спутника выступает в качестве замкнутого контура. Для параметров GP-B, по расчётом, суммарный угол отклонения должен был равняться 6,6 угловых секунд в год. Отклонение спина должно наблюдаться в плоскости орбиты спутника.

Прецессия второго типа на два порядка слабее и возникает из-за увлечения пространства Землей. Земля вращается вокруг своей оси и как бы увлекает за собой пространство. Если поместить гироскоп на полюсе Земли, он начнет очень медленную прецессию в направлении вращения Земли (против часовой стрелки на северном полюсе). На экваторе должна наблюдаться обратная картина: пространство ближе к Земле увлекается больше, и прецессия должна происходить в другую сторону, по часовой стрелке, если смотреть со стороны северного полюса. Этот эффект был описан в 1960 году Шиффом на основании уравнений движения частицы со спином, выведенных Папапетроу методом Инфельда. Он вычислил величину прецессии осей гироскопов и предложил произвести эксперимент, либо в лаборатории на Земле, либо в космосе. Из его расчётов следовало, что эффект в лаборатории будет на несколько порядков меньше, поэтому ор-

битальный эксперимент более предпочтителен. Для GP-B прецессия из-за увлечения инерциальной системы отсчета должна составить примерно 0,014 угловых секунд в год.

Основная аппаратура Gravity Probe B состоит из системы четырёх гироскопов, роторы которых являются самыми сферическими объектами, когда-либо изготовленными человеком (шероховатость поверхности сфер составляет всего несколько десятков атомных слоев) и телескопа для определения начальной ориентации спутника, который был направлен на HR8703 – двойную звезду в созвездии Пегаса.

Первоначально оси вращения каждого гироскопа сонаправлены с осью телескопа, однако из-за ожидаемого искажения пространства допускалось, что их ориентация со временем изменится. Соответственно, главная задача – это регистрация всех этих отклонений. Инженеры в Стенфорде разработали технологию нанесения тонкой (всего несколько нанометров в толщину) сверхпроводящей ниобиевой пленки на поверхность сферы. Направление оси вращения гироскопа детектируется по магнитному моменту (Лондоновскому моменту), который генерирует вращающийся сверхпроводник. Детекторами поля служат сверхпроводящие квантовые интерферометры (сквиды) с чувствительностью, позволяющей измерять магнитное поле на 10 порядков более слабое, чем поле Земли. Измеренное таким образом микроскопическое смещение осей гироскопов будет только за счёт ожидаемых эффектов – геодезической прецессии и увлечения инерциальной системы координат.

Для поддержания ниобиевой пленки в сверхпроводящем состоянии необходимо поддерживать криогенную температуру 1,8 К. Поэтому основное измерительное оборудование GP-B помещено в сигарообразную 2,7-метровую криогенную ёмкость, окружённую слоем сверхпроводящей свинцовой фольги для защиты от внешних магнитных полей. Эта ёмкость, в свою очередь, вместе со сверхпроводящей оболочкой, помещена в сосуд Дьюара, в момент запуска содержавший 2441 л жидкого гелия.

Сверхтекучий гелий в сосуде Дьюара спутника служит не только для поддержки криогенной среды, но и как топливо для слабых манёвров при точной наводке телескопа.

Спутник движется по свободной от сноса

орбите. Это означает, что орбита спутника постоянно (с частотой 10 раз в секунду) корректируется по движению центра масс одного из гироскопов, который, как и три остальных, защищён от всех внешних воздействий (атмосфера, магнитное поле Земли, давление солнечного света и т.д.), кроме взаимодействия с гравитационным полем. Координаты спутника регистрируются с помощью системы GPS. Гироскопы вращаются с угловой скоростью около 4000 оборотов в минуту. Они подвешены электростатически на расстоянии долей миллиметра от стенок полости. Чтобы избежать контакта гироскопа со стенками, позиция полости относительно гироскопа корректируется 220 раз в секунду. Роторы гироскопов GP-B изготовлены настолько совершенными, что можно исключить из рассмотрения вероятность прецессии из-за механических дефектов или электрических сил. Прибор способен зафиксировать смещение осей вплоть до 0,5 миллисекунд угловой дуги в год.

Данные Gravity Probe B позволили сделать выводы о правильности общей теории относительности, предсказывающей искривление пространства Землей. Величина геодезической прецессии совпала с теоретически предсказанной с отклонением в 1%: измеренный годовой эффект поворота оси в плоскости орбиты равен $?6,638 \pm 0,097$ угловой секунды, предсказанный суммарный годовой эффект равен $?6,571 \pm 0,001$ угловой секунды (в него дает вклад в основном геодезическая прецессия в поле Земли, $?6,606$, но также прецессия в поле Солнца, $+0,007$, и собственное движение опорной звезды, $+0,028$). Эффект увлечения системы отсчета проявляется в 170 раз слабее, чем геодезическая прецессия. Анализ данных позволяет говорить о её наличии, однако об её точном значении говорить пока что трудно: значение искажений, внесённых техникой, велико, и группа сейчас работает над тем, как внести коррективы в эти величины.

Также исследовательский коллектив под руководством профессора Френсиса Эверитта из Стэнфордского университета, занимавшийся обработкой данных, смог также обнаружить и некоторые другие, ранее неизвестные эффекты. Спутник, двигаясь по орбите, совершает также движение, связанное с "дрожанием" его оси вращения. Ождалось, что эти колебания будут неизменными, однако выяснилось, что они со вре-

менем уменьшаются. Также обнаружилось, что оси гироскопов, установленных на борту спутников, подвергаются воздействию некоторых дополнительных малых вращательных моментов.

Есть предположение, что оба явления связаны с возникновением областей с электростатическими зарядами на поверхностях спутника и вращающихся частей (гироскопов). До запуска учёные знали об этом эффекте, но считали, что его среднее воздействие окажется нулевым.

В ближайшее время эти эффекты будут детально исследованы, затем определят их точные величины и только после этого исключат из результатов.

В этом контексте заметим, что в механике ОТО существует проблема однозначности уравнений вращательного движения. Из-за того, что уравнения, полученные разными авторами с помощью различных методов расходятся между собой, до сих пор не создана последовательная и общепринятая механика ОТО. Нерешенность этой проблемы тормозит развитие релятивистской небесной механики, с помощью которого можно было бы решать практические задачи по сверхточному расчету траекторий навигационных спутников и пр., а также изучать эволюционные задачи для планетных и звездных систем, в которых релятивистские эффекты могут играть значительную роль. Появление «неизвестных» эффектов в дрожании гироскопов в проекте GPB говорит о необходимости рассмотрения уравнений движения, полученных с помощью других методов.

Поэтому решение проблемы однозначности релятивистских уравнений поступательного и вращательного движения тел в ОТО является чрезвычайно актуальной и практически важной. Астрономы-практики и специалисты по астрономии ждут от физиков достоверных релятивистских уравнений поступательного и вращательного движений макроскопических тел с учетом их внутренней структуры.

Прежде чем приступить к дальнейшему изложению содержания работы, заметим, что в работе [1] был дан критический анализ всех основных существующих уравнений вращательного движения, полученных разными авторами (Петрова, Рябушко, Брумберг и др.) и различными методами (метод ЕИН, первый метод Фока, метод Инфельда, второй метод Фока и др.). В ре-

зультате такого анализа было показано, что из всех этих уравнений, на сегодняшний день, наиболее правильным, полным уравнением вращательного движения является уравнение Брумберга [2], выведенное из полевых уравнений Эйнштейна, с помощью второго метода Фока [1]. Для двух тел $m \ll m_0$ уравнение Брумберга имеет вид [1]

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\omega}} = & \frac{1}{2c^2} (\vec{V}\vec{\omega})[\vec{V}\vec{\omega}] + \frac{9\gamma m_0}{2r^5 c^2} (\vec{r}\vec{V})[\vec{V}\vec{r}] + \\ & + \frac{\gamma}{c^2} \left\{ \frac{5m_0}{r^3} \vec{\omega}(\vec{r}\vec{V}) + \frac{m_0}{r^3} \vec{V}(\vec{r}\vec{\omega}) - \frac{2m_0}{r^3} \vec{r}(\vec{V}\vec{\omega}) + \right. \\ & + \frac{3I_0^*}{r^5} \vec{\omega}_0(\vec{r}\vec{V}) + \frac{3I_0^*}{r^5} \vec{V}(\vec{r}\vec{\omega}_0) + \frac{3I_0^*}{r^5} \vec{r}(\vec{V}\vec{\omega}_0) - \\ & - \frac{15I_0^*}{r^7} \vec{r}(\vec{r}\vec{V})(\vec{r}\vec{\omega}_0) + \frac{I_0^*}{r^3} [\vec{\omega}\vec{\omega}_0] + \\ & \left. + \frac{3I_0^*}{r^5} (\vec{r}\vec{\omega}_0)(\vec{r}\vec{\omega}) \right\} + \frac{9\gamma m_0 I'}{I^* r^5 c^2} (\vec{r}\vec{\omega})[\vec{r}\vec{\omega}] + \\ & + \frac{9\gamma m_0 I'}{I^* r^5 c^2} \left[\vec{\omega}(\vec{r}\vec{V}) + \vec{r}(\vec{\omega}\vec{V}) + \vec{V}(\vec{\omega}\vec{r}) - \frac{5\vec{r}}{r^2} (\vec{r}\vec{V})(\vec{\omega}\vec{r}) \right], \quad (1) \end{aligned}$$

где $I^* = \frac{2}{5} mR^2$, $I' = \frac{1}{35} mR^4$. В той же работе [1], введя обозначение

$$\vec{S} = I^* \left\{ \left(1 + \frac{V^2}{2c^2} + \frac{3U}{c^2} \right) \vec{\omega} + \frac{1}{2c^2} [\vec{V}[\vec{\omega}\vec{V}]] + \right. \\ \left. + \frac{3m_0}{mc^2} rot \vec{U}_M - \frac{2}{c^2} rot \vec{U}_0 - \frac{6m_0 I'}{I^* c^2} rot \vec{U} \right\}, \quad (2)$$

релятивистское уравнение вращательного движения Брумберга записано в виде

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = [\vec{\omega}\vec{S}] \quad (3)$$

В настоящей работе мы продолжим изучение вопроса о дальнейшем обосновании релятивистского уравнения вращательного движения Брумберга. Для этого выберем следующий, независимый от предыдущих, подход к выводу уравнения вращательного движения тел в механике ОТО.

Исходим из релятивистского уравнения поступательного движения для двух сферических, однородных тел ($m \ll m_0$) [1]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{V}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0, \quad (4)$$

где функция Лагранжа

$$\begin{aligned} L = & -mc^2 + \frac{1}{2} m V^2 + T + \frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{8} m V^4 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{3} \epsilon + \frac{3}{2} T \right) V^2 - \frac{1}{4} I^* (\vec{\omega}\vec{V})^2 \right] + \frac{\gamma m m_0}{r} \cdot \\ & \cdot \left[1 + \frac{3V^2}{2c^2} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\xi_0}{m_0} + \frac{\xi}{m} \right) - \frac{\gamma m_0}{2c^2 r} \right] + \\ & + \frac{\gamma}{2c^2} \left(\left[(3m_0 \vec{S} + 4m \vec{S}_0) \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right] \vec{V} \right) + \frac{2\gamma}{7c^2} \frac{m_0}{m} \cdot \\ & \cdot \left[(\vec{S}\vec{\nabla})[\vec{S}\vec{\nabla}] \frac{1}{r} + \frac{\gamma}{c^2} (\vec{S}\vec{\nabla}) \cdot [\vec{S}_0 \vec{\nabla}] \frac{1}{r} + \frac{2\gamma m}{7m_0 c^2} ([\vec{S}_0 \vec{\nabla}] \cdot [\vec{S}_0 \vec{\nabla}]) \frac{1}{r} \right]. \quad (5) \end{aligned}$$

Здесь Т-кинетическая энергия вращательного движения пробного тела, е- энергия взаимного притяжения частиц, составляющих тело (взятая с обратным знаком)

$$\begin{aligned} \xi_0 = & \frac{2}{3} \epsilon_0 + \frac{8}{3} T_0, \\ ([\vec{S}\vec{\nabla}] [\vec{S}_0 \vec{\nabla}]) = & (\vec{S}\vec{S}_0) \Delta - (\vec{S}\vec{\nabla}) (\vec{S}_0 \vec{\nabla}), \\ (\vec{S}_0 \vec{\nabla}) \left(\vec{S}_0 \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) = & -\frac{S_0^2}{r^3} + \frac{3(\vec{r}\vec{S}_0)^2}{r^5}, \end{aligned} \quad (6)$$

Поступательный импульс определяется из (5) соотношения

$$\begin{aligned} \vec{P} = & \frac{\partial L}{\partial \vec{V}} = m \vec{V} + \frac{m \vec{V}}{c^2} \left[\frac{V^2}{2} + \left(\frac{2\epsilon}{m} + \frac{3T}{m} \right) + 3U \right] - \\ & - \frac{1}{2c^2} (\vec{S}\vec{V}) \vec{\omega} + \frac{\gamma}{2c^2} \left[(3m_0 \vec{S} + 4m \vec{S}_0) \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right]. \quad (7) \end{aligned}$$

Попробуем определить вращательный импульс пробного тела, аналогично поступательному импульсу, формулой

$$\begin{aligned} \vec{S} = & \frac{\partial L}{\partial \vec{\omega}} = I^* \left\{ \left(1 + \frac{3V^2}{2c^2} + \frac{8}{3} \frac{U}{c^2} \right) \vec{\omega} - \right. \\ & \left. - \frac{\vec{V}}{2c^2} (\vec{\omega}\vec{V}) + \frac{3m_0}{mc^2} rot \vec{U}_M - \frac{2}{c^2} rot \vec{U}_0 - \frac{8}{7} \frac{m_0}{mc^2} rot \vec{U} \right\}. \quad (8) \end{aligned}$$

Перепишем это выражение, используя очевидное соотношение

$$[\vec{V}[\vec{\omega}\vec{V}]] = V^2 \vec{\omega} - \vec{V}(\vec{V}\vec{\omega}) \quad (9)$$

Тогда (8) принимает вид

$$\begin{aligned} \vec{S} = & I^* \left\{ \left(1 + \frac{V^2}{c^2} + \frac{8}{3} \frac{U}{c^2} \right) \vec{\omega} - \frac{1}{2c^2} [\vec{V}[\vec{\omega}\vec{V}]] + \right. \\ & + \frac{3m_0}{mc^2} rot \vec{U}_M - \frac{2}{c^2} rot \vec{U}_0 - \frac{8}{7} \frac{m_0}{mc^2} rot \vec{U} \left. \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

Сравним теперь это выражение с вращательным импульсом (2) вытекающим из уравнения вращательного движения Брумберга (1). Для этого перепишем (2) в виде

$$\begin{aligned} \vec{S} = I^* & \left\{ \left(1 + \frac{V^2}{2c^2} + \frac{3U}{c^2} \right) \vec{\omega} - \frac{1}{2c^2} [\vec{V} [\vec{\omega} \vec{V}]] + \right. \\ & \left. + \frac{3m_0}{mc^2} rot \vec{U}_M - \frac{2}{c^2} rot \vec{U}_0 - \frac{15}{14} \frac{m_0}{mc^2} rot \vec{U} \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

Сравнивая оба вращательные импульсы проблемного тела, полученных разными методами, убеждаемся, что они почти совпадают. Незначительные отличия, связанные с числовыми коэффициентами у некоторых членов, по-видимому, связаны с различием при вычислении интегралов зависящих от внутренней структуры; Брумберг предполагает тела абсолютно твердыми, мы же при выводе релятивистского уравнения поступательного движения предполагаем тела жидкими.

Таким образом, приходим к выводу, что для определения выражений для поступательного и вращательного импульсов, достаточно знать функцию Лагранжа релятивистского уравнения поступательного движения (5). Эта функция установлена довольно надежно (с точностью

$L \sim mq^2 \frac{R^2}{c^2 D^2}$) и совпадает у Абдильдина и у

Брумберга [1]. Небольшие различия функции Лагранжа связаны с разными предположениями о внутренней структуре тел (твердое тело или жидкость).

Зная явное выражение вращательного импульса из функции Лагранжа релятивистского уравнения поступательного движения, мы можем установить релятивистское уравнение вращательного движения, не прибегая к его выводу из уравнений гравитационного поля Эйнштейна.

Действительно, вращательный импульс (10), как любой произвольный вектор должен удовлетворять соотношению

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{dS}{dt} \vec{e}_s + [\vec{\Omega} \vec{S}] \quad (12)$$

Согласно адиабатической теории движения тел в ОТО [1] имеют место соотношения

$$S = \text{inv}, \quad \vec{\Omega} = \frac{\partial H}{\partial \vec{S}}. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12), имеем

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = [\vec{\omega} \vec{S}], \quad (14)$$

т.е. искомое релятивистское уравнение вращательного движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдильдин М.М. Механика теории гравитации Эйнштейна. Алма-Ата. 1988, 198 с.
2. Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика. М., 1972. 382 с.

Резюме

Денелердің ЖСТ механикасындағы релятивтік айналмалы қозғалыс тендеулерінің бірмөнді болмауын эксперимент нәтижелерін талдағанда ескеру керектігі көрсетілген.

Summary

In present work is shown, that in interpretation of experimental dates it is necessary to take into account existing unambiguity problem of relativistic equations of rotation motion in GR mechanics.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби,

г. Алматы

Поступила 15.06.2008 г.