УДК 530.12

М.Е. АБИШЕВ

КОРРЕКТНАЯ МЕТРИКА ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В МЕХАНИКЕ ОТО И ВЫБОР СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

В работе показано, что корректная метрика первого приближения в механике ОТО, метрика Шварцшильда и точная метрика для одной сосредоточенной массы, полученная Фоком в гармонических координатах, соответствуют друг другу.

Проблема однозначности релятивистских уравнений (поступательного и вращательного) движения в механике ОТО остается актуальной. Одним из возможных способов решения этого вопроса – поиск независимых способов получения релятивистских уравнений движения. Речь идет о том, что традиционный прием получения этих уравнений путем вывода из уравнений поля Эйнштейна тем или иным методом (метод Инфельда, метод Фока и пр.) или постулированием тех или иных уравнений в четырехмерной форме не снимает вопрос об однозначности релятивистских уравнений движения.

В настоящее время вопрос об однозначности уравнений движения связывается с корректной метрикой первого приближения в механике ОТО [1]. Установление такой метрики – разрешимая задача, хотя предварительно должен быть исследован, в свою очередь, вопрос о координатной системе, в которой записывается метрика первого приближения. Такое исследование – предмет настоящей статьи.

Действительно, корректная метрика первого приближения приведена в [1] и имеет вид

$$ds^2 = \left(c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2} - \frac{2\gamma}{c^2} \int \frac{\rho'(\frac{3}{2}v^2 + \Pi - U)' - P'_{kk}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (dx')^3 \right) dt^2 -$$

$$- \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\left(dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2\right) +$$

$$+\frac{8}{c^2}\left(U_1dx_1+U_2dx_2+U_3dx_3\right)dt \qquad (1)$$

где ρ' - плотность массы, v' - скорость вещества внутри тела, Π' - упругая энергия единицы массы, P'_{ik} - трехмерный тензор напряжений, U, $\vec{U}$ - ньютонов и вектор потенциалы гравитационного поля:

$$U=\gamma\int\frac{\rho'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dx'dy'dz',\ U_i=\gamma\int\frac{(\rho v_i)'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dx'dy'dz'. \quad (2)$$

Для центрального тела или для одной сосредоточенной массы m_0, т.е. в случае центрально-симметричного статического гравитационного поля (1) приобретает вид

$$ds^2=\left(c^2-2U+\frac{2U^2}{c^2}\right)dt^2-$$

$$-\left(1+\frac{2U}{c^2}\right)\left(dx_1{}^2+dx_2{}^2+dx_3{}^2\right). \qquad (3)$$

Напомним, что метрика (1), поэтому и (3), получены в гармонической системе координат. Как видно из (2), уже в первом приближении $\left(\sim\frac{1}{c^2}\right)$ гравитационное поле нелинейно $\left(\sim U^2\right)$ и трехмерная (пространственная) метрика искривлена – геометрия становится конформно-евклидовой.

Сравним теперь метрику (3) с пространственно-временной метрикой Шварцшильда [2]

$$ds^2=\left(1-\frac{r_g}{\rho}\right)c^2dt^2-\frac{d\rho^2}{1-\frac{r_g}{\rho}}-\rho^2d\theta^2-\rho^2\sin^2\theta d\varphi^2 \qquad (4)$$

где r_g - гравитационный радиус.

Преобразуем (4) к координатам, в которых пространственная метрика имела бы конформно-евклидов вид (то есть она пропорциональна своей евклидовой форме).

Полагая

$$\rho=r\left(1+\frac{r_g}{4r}\right)^2 \qquad (5)$$

получим из (3)

$$ds^2=\left(\frac{1-\frac{r_g}{4r}}{1+\frac{r_g}{4r}}\right)^2c^2dt^2-$$

$$-\left(1-\frac{r_g}{4r}\right)^4\left(dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2\right). \qquad (6)$$

Разлагая компоненты g_{00} метрического тензора в ряд с точностью $\left(\sim\frac{1}{c^4}\right)$, а компоненты g_{ik} с точностью $\left(\sim\frac{1}{c^2}\right)$, имеем

$$g_{00}=1-\frac{r_g}{r}+\frac{r_g^2}{2r^2},\ \left(1-\frac{r_g}{4r}\right)^4\approx1+\frac{r_g}{r}. \qquad (7)$$

тогда метрика (4) запишется как

$$ds^2=\left(1-\frac{r_g}{r}+\frac{r_g^2}{2r^2}\right)c^2dt^2-$$

$$-\left(1+\frac{r_g}{r}\right)\left(dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2\right). \qquad (8)$$

Введя ньютонов потенциал $U=\frac{\gamma m_0}{r}$, перепишем (8) в виде

$$ds^2=\left(1-\frac{2U}{c^2}+\frac{2U^2}{c^4}\right)c^2dt^2-$$

$$-\left(1+\frac{2U}{c^2}\right)\left(dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2\right). \qquad (9)$$

Координаты r, θ, φ - изотропные сферические координаты; вместо них можно ввести также изотропные декартовые координаты x_1, x_2, x_3. Тогда метрика Шварцшильда приобретает следующий конечный (приближенный) вид

$$ds^2=\left(c^2-2U+\frac{2U^2}{c^2}\right)dt^2-$$

$$-\left(1+\frac{2U}{c^2}\right)\left(dx_1{}^2+dx_2{}^2+dx_3{}^2\right). \qquad (10)$$

Теперь мы видим, что уточненная метрика первого приближения Фока и метрика Шварцшильда совпадают. Нелинейность поля, которая плохо видно в (4), стало явной в (10).

Наконец, чтобы окончательно разобраться в метрике первого приближения, обратимся к точной метрике для одной сосредоточенной массы m_0, полученной Фоком в [3]

$$ds^2=\left(\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\right)c^2dt^2-\left(\frac{r+\alpha}{r-\alpha}\right)dr^2-$$

$$-(r+\alpha)^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right). \qquad (11)$$

Здесь система координат – гармоническая,

$$\alpha = \frac{\gamma m_0}{c^2} \quad .$$

Разлагая (11) в ряд и удерживая члены $\left(\sim \frac{1}{c^2}\right)$ (первое приближение), получим

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\alpha}{r} + \frac{2\alpha^2}{r^2}\right)c^2dt^2 - \\ -\left(1 + \frac{2\alpha}{r}\right)\left(dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2\right) \quad . \qquad (12)$$

Переходя к изотропным декартовым координатам, точную метрику Фока (11) перепишем в первом приближении в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\alpha}{r} + \frac{2\alpha^2}{r^2}\right)c^2dt^2 - \\ -\left(1 + \frac{2\alpha}{r}\right)\left(dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2\right) \quad , \qquad (13)$$

или

$$ds^2 = \left(c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2}\right)dt^2 - \\ -\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\left(dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2\right) \quad . \qquad (14)$$

Таким образом, хотя сами центрально-симметричные метрики зависят от выбора системы координат, но все они в гармонической системе координат имеют стандартный вид (2), поле нелинейно и пространственная часть метрики конформно-евклидова.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абдильдин М.М.* Проблема движения тел в общей теории относительности. Алматы. 2006, - 152 с.

2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М., 1973, - 400 с.

3. *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. М., 1961. – 563 с.

Резюме

ЖСТ механикасындағы бірінші жуықтау метрикасы, сфералық координаттарда жазылған Шварцшильд метрикасы мен Фоктың гармониялық координаттарда жазылған орталық симметриялы метрикасы бір біріне сәйкес келетіндігі көрсетілген.

Summary

In the present work it is shown, that first approximation metrics, Schwarzschild metrics and Fock's centrally symmetric metrics, obtained in harmonic coordinates, is conform to each other.

КазНУ им. аль-Фараби,
г. Алматы

Поступила 20 июня 2007 г.