УДК 517.94

Б. АЙБЕК[1], Г. БЕСБАЕВ[2], У. ИСКАКОВА[3]

О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ПОТЕНЦИАЛА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлена академиком НАН РК Т.Ш. Кальменовым)

В работе получены граничные условия эллиптического уравнения второго порядка в ограниченной области.

Пусть $\Omega \subset R^n$ – конечная область с гладкой границей $\partial\Omega \subset C^1$.

В области $\Omega \subset R^n$ рассмотрим линейное эллиптическое уравнение второго порядка

$$L(x,D)u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + au = f \quad (1)$$

и сопряженное ему уравнение

$$L^+(y,D)\upsilon = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}(a_{ij}\upsilon) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}(a_i\upsilon) + a\upsilon = t \quad (2)$$

Пусть $\varepsilon_n(x,y)$ – фундаментальное решение уравнения (1), удовлетворяющее уравнениям

$$L(x,D)\varepsilon_n(x,y) = \delta(x-y) \quad (3)$$

$$L^+(y,D)\varepsilon_n(y,D) = \delta(x-y) \quad (4)$$

Отметим что существование фундаментального решения $\varepsilon_n(x,y)$ доказана в работах [1]-[3] и при этом главная часть $\varepsilon_n(x,y)$ задается формулой

$$\varepsilon_n(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|x-y|} & n=2 \\ \dfrac{1}{(n-2)\omega_n}|x-y|^{2-n} & n=3,4 \end{cases} \quad (5)$$

Здесь ω_n – площадь единичной сферы R^n.

Определим Ньютонов (объемный) потенциал следующим образом

$$u = L^{-1}f = \int_{\partial\Omega} \varepsilon_n(x,y) f(y)dy \quad (6)$$

Имеет место

Теорема. Пусть $a_{ij} \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $a_i \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$, $u \in C(\overline{\Omega})$ $a \in \partial\Omega$. Тогда для любой $f \in L_2(\Omega)$ Ньютонов потенциал $u \in W_2^2(\Omega)$ удовлетворяет граничному условию

$$\frac{-u(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varepsilon_n}{\partial N_y^*}(x,y)u(y)dS_j -$$

$$- \int_{\partial\Omega} \varepsilon_n(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial N_y^*}dS_j = 0 \quad (7)$$

Обратно, если $u_1 \in W_2^2(\Omega)$ решение уравнения

$$Lu_1 = f(x) \quad (8)$$

удовлетворяет граничному условию (7), то u_1 совпадает с объемным потенциалом, определяемым формулой (6).

Здесь

$$\frac{\partial u}{\partial N_y} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} n_i a_{ij}\frac{\partial u}{\partial y_j}, \quad \frac{\partial u}{\partial N_y^*} = \sum_{i,j=1}^{n} n_i \frac{\partial}{\partial y_i} a_{ij} u \quad (9)$$

конормальные производные. Эта теорема является обобщением соответствующей теоремы [4].

Доказательство. Пусть $f \in L_2(\Omega)$ и тогда объемный потенциал $u \in W_2^2(\Omega)$ (см. [1]). Полагая в формуле (6) вместе $f = Lu$ и непосредственным вычислением получим

$$\int_{\partial\Omega}\sum_{i=1}^{n} n_i a_{ij}\frac{\partial u}{\partial y_j}\varepsilon_n(x,y)dS_j + \int_{\partial\Omega}\sum_{i,j=1}^{n} n_j \frac{\partial u}{\partial y_i} a_{ij}\varepsilon_n(x,y)udS_y +$$

$$+ \int_{\Omega} uL^+(y,D)\varepsilon_n(x,y)dy =$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\partial\Omega} n_i a_{ij}(y)\frac{\partial u}{\partial y_j}\varepsilon_n(x,y)dS_j +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\partial\Omega} n_j \frac{\partial}{\partial y_i} a_{ij}\varepsilon_n(x,y)udS_j + u(x) =$$

$$= u(x) + \mathrm{I}_u(x) \quad (10)$$

$$\mathrm{I}_u(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\partial\Omega} n_i a_{ij}(y) \frac{\partial u}{\partial y_j} \varepsilon_n(x,y) +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\partial\Omega} n_j \frac{\partial}{\partial y_i} a_{ij}\varepsilon_n(x,y) u ds_j \quad =$$

$$= -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial N_y} \varepsilon_n(x,y) + \frac{\partial u}{\partial N_y^*} \varepsilon_n(x,y) u ds_j \quad x \in \Omega \quad (11)$$

Легко проверить, что

$$L_u(x) \equiv 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega \qquad (12)$$

В силу свойств решения задачи Дирихле функция $\mathrm{I}_u(x)$ однозначно определяется по своим граничным значениям. Переходя к пределу $x \to x \in \partial\Omega$ изнутри области с учетом свойств фундаментального решения как и в работе [4], будем иметь

$$\mathrm{I}_u^+(x) = \lim_{x \to x \in \partial\Omega} \mathrm{I}_u(x) == -\frac{u(x)}{2} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial N_y} \varepsilon_n(x,y) ds_j +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial N_y^*}(x,y) ds_j = 0, \qquad x \in \partial\Omega \qquad (13)$$

Тем самым соотношение (13) является граничным условием объемного потенциала.

Обратно, если $u_1 \in W_2^2(\Omega)$ удовлетворяет уравнению (8) и граничному условию (7), то функция $\upsilon(x,y) = u_1 - u$, где u – объемный потенциал удовлетворяет уравнению

$$L\upsilon = 0 \qquad (14)$$

И граничному условию

$$\mathrm{I}_\upsilon^+ \big|_{x \in \partial\Omega} = 0 \qquad (15)$$

Непосредственным вычислением, как и выше, можно показать, что

$$0 = \int_{\Omega} \varepsilon_n(x,y) L(y,D) \upsilon(y) dy = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \upsilon}{\partial N_y} \varepsilon_n + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial N_y^*} \varepsilon_n \upsilon ds_j +$$

$$+ \upsilon(x) = \mathrm{I}_\sigma(x) + \upsilon(x) \qquad x \in \Omega \qquad (16)$$

Отсюда, переходя к пределу $x \to x \in \partial\Omega$, получим

$$-\upsilon(x)\big|_{x \in \partial\Omega} = \mathrm{I}_\upsilon^+(x)\big|_{x \in \partial\Omega} = 0 \qquad (17)$$

В силу единственности решения задачи Дирихле для уравнения (14) получим $\upsilon(x) \equiv u_1 - u \equiv 0$ т.е. $u_1 \equiv u$. Теорема доказана.

В дальнейшем считать, что $a_{ij} \in C^{2+\alpha}(R^n)$, $a_i \in C^{1+\alpha}(R^n)$, $a \in C^\alpha(R^n)$, тогда фундаментальное решение $\varepsilon_n(x,y)$ уравнением (1), (2) определены во всем пространстве.

Применяя теорему 1 в области $\Omega^\perp = R^n \setminus \Omega$ как и выше, можно показать, что объемный потенциал

$$u(x) = \int_{\Omega^\perp} \varepsilon_n(x,y) f(y) dy \qquad (18)$$

удовлетворяет граничному условию

$$\frac{-u(x)}{2} + \int_{\partial\Omega^\perp} \frac{\partial u}{\partial N_y} \varepsilon_n(x,y) dS_j +$$

$$\int_{\partial\Omega^\perp} \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial N_y^*}(x,y) u(x,y) dS_j = \mathrm{I}_u^-(x), \quad x \in \partial\Omega \qquad (19)$$

Из формулы (13) и (18) получим непрерывный аналог теоремы Сохоцкого Племеля

$$\mathrm{I}_u^+(x) = \mathrm{I}_u^-(x) \qquad x \in \partial\Omega \qquad (20)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Brelot M.* «Elements de la theorie classique du potentiel» Sorbonne Univ. Centre.Doc.Univ., Paris (1959).

2. *Kellog O.D.* Foundations of Potential Theory, Ungar, New York, 4th printing (1970).

3. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики (Наука, Москва, 1981).

4. *Кальменов Т.Ш., Сураган Д.* Спектральные вопросы объемных потенциалов, Доклады РАН, 80 (2), pp. 646-649 (2009).

Резюме

Бұл жұмыста екінші ретті эллиптикалық теңдеуінің шектелген облысындағы потенциалының шекаралық шарттары алынды.

Summary

In this paper boundary conditions of potential are given in bounded area of elliptical equation second order.

Институт математики, механики и информатики, г. Алматы.
Южно-Казахстанский Государственный Университет им. М. Ауезова, г. Шымкент

Поступила 03.03.2010 г.