УДК 517.94

Б. АЙБЕК[1], Г. БЕСБАЕВ[2], У. ИСКАКОВА[3]

О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ПОТЕНЦИАЛА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлена академиком НАН РК Т.Ш. Кальменовым)

В работе получены граничные условия эллиптического уравнения второго порядка в ограниченной области.

Пусть $\Omega \subset R^n$ – конечная область с гладкой границей $\partial\Omega \subset C^1$.

В области $\Omega \subset R^n$ рассмотрим линейное эллиптическое уравнение второго порядка

$$L(x,D)u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + au = f \quad (1)$$

и сопряженное ему уравнение

$$L^+(y,D)\upsilon = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}(a_{ij}\upsilon) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}(a_i \upsilon) + a\upsilon = t \quad (2)$$

Пусть $\varepsilon_n(x,y)$ – фундаментальное решение уравнения (1), удовлетворяющее уравнениям

$$L(x,D)\varepsilon_n(x,y) = \delta(x-y) \quad (3)$$

$$L^+(y,D)\varepsilon_n(y,D) = \delta(x-y) \quad (4)$$

Отметим что существование фундаментального решения $\varepsilon_n(x,y)$ доказана в работах [1]-[3] и при этом главная часть $\varepsilon_n(x,y)$ задается формулой

$$\varepsilon_n(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|x-y|} & n=2 \\ \dfrac{1}{(n-2)\omega_n}|x-y|^{2-n} & n=3,4 \end{cases} \quad (5)$$

Здесь ω_n – площадь единичной сферы R^n.

Определим Ньютонов (объемный) потенциал следующим образом

$$u = L^{-1}f = \int_{\partial\Omega} \varepsilon_n(x,y) f(y)dy \quad (6)$$

Имеет место

Теорема. Пусть $a_{ij} \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $a_i \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$, $u \in C(\overline{\Omega})$ $a \in \partial\Omega$. Тогда для любой $f \in L_2(\Omega)$ Ньютонов потенциал $u \in W_2^2(\Omega)$ удовлетворяет граничному условию

$$\frac{-u(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial N_y^*}(x,y)u(y)dS_j - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_n(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial N_y^*}dS_j = 0 \quad (7)$$

Обратно, если $u_1 \in W_2^2(\Omega)$ решение уравнения

$$Lu_1 = f(x) \quad (8)$$

удовлетворяет граничному условию (7), то u_1 совпадает с объемным потенциалом, определяемым формулой (6).

Здесь

$$\frac{\partial u}{\partial N_y} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} n_i a_{ij}\frac{\partial u}{\partial y_j}, \quad \frac{\partial u}{\partial N_y^*} = \sum_{i,j=1}^{n} n_i \frac{\partial}{\partial y_i} a_{ij} u \quad (9)$$

конормальные производные. Эта теорема является обобщением соответствующей теоремы [4].

<u>**Доказательство.**</u> Пусть $f \in L_2(\Omega)$ и тогда объемный потенциал $u \in W_2^2(\Omega)$ (см. [1]). Полагая в формуле (6) вместе $f = Lu$ и непосредственным вычислением получим

$$\int_{\partial\Omega}\sum_{i=1}^{n} n_i a_{ij}\frac{\partial u}{\partial y_j}\varepsilon_n(x,y)dS_j + \int_{\partial\Omega}\sum_{i,j=1}^{n} n_j \frac{\partial u}{\partial y_i} a_{ij}\varepsilon_n(x,y)udS_y + \int_{\Omega} uL^+(y,D)\varepsilon_n(x,y)dy =$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\partial\Omega} n_i a_{ij}(y)\frac{\partial u}{\partial y_j}\varepsilon_n(x,y)dS_j + \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\partial\Omega} n_j \frac{\partial}{\partial y_i} a_{ij}\varepsilon_n(x,y)udS_j + u(x) =$$

$$= u(x) + \mathrm{I}_u(x) \quad (10)$$