МАТЕМАТИКА

УДК 517.938

С. А. АЙСАГАЛИЕВ, Д. Г. ШАНАЗАРОВ

К ИССЛЕДОВАНИЮ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ В ОСНОВНОМ СЛУЧАЕ

Исследуются асимптотические свойства решений нелинейных регулируемых систем в основном случае. На основе оценки несобственных интегралов на множестве решений динамической системы получен критерий абсолютной устойчивости.

Постановка задачи

Рассмотрим уравнения движения регулируемой системы вида

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma), \quad \sigma = Sx, \quad x(0) = x_0, \quad t \in I = [0,\infty), \tag{1}$$

где A, B, S – постоянные матрицы порядков $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$ соответственно, матрица A – гурвицева.

Функция $\varphi(\sigma)$ является элементом следующего множества

$$\varphi(\sigma) \in \Phi_0 = \{\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1),\ldots,\varphi_m(\sigma_m)) \in C(R^m, R^m) \mid$$
$$0 \le \varphi_i(\sigma_i)\sigma_i < \mu_{0i}\sigma_i^2, \ \forall \sigma_i \in R^1, \ i = \overline{1,m}; \ \varphi(0) = 0\}. \tag{2}$$

Положение равновесия системы (1) определяется из решения алгебраических уравнений $Ax_* + B\varphi(\sigma_*) = 0$, $\sigma_* = Sx_*$. Так как матрица A гурвицева, то $x_* = -A^{-1}B\varphi(\sigma_*)$, $\sigma_* = -SA^{-1}B\varphi(\sigma_*)$. Отсюда следует, что если матрица $-SA^{-1}B$ не особая, то система (1) имеет единственное положение равновесия ($x_* = 0$, $\sigma_* = 0$), для любых $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$.

Определение 1. Говорят, что тривиальное решение $x_* = 0$ системы (1), (2) абсолютно устойчиво, если матрицы A, $A + B\mu S$, $0 \le \mu \le \overline{\mu}_0$ гурвицевы, где $\mu = diag(\mu_1,\ldots,\mu_m)$, $\overline{\mu}_0 = diag(\overline{\mu}_{01},\ldots,\overline{\mu}_{0m})$, $0 \le \mu_i \le \overline{\mu}_{0i}$, $i = \overline{1,m}$, и для всех $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ предел $\lim\limits_{t\to\infty} x(t;0,x_0,\varphi) = 0$, $\forall x_0$, $|x_0| < \infty$.

Определение 2. Критерием абсолютной устойчивости для системы (1), (2) называются алгебраические или другие соотношения, связывающие матрицы (A,B,S,μ_0), $\mu_0 = diag(\mu_{01},\ldots,\mu_{0m})$, $\mu_{0i} \le \overline{\mu}_{0i}$, $i = \overline{1,m}$, при выполнении которых тривиальное решение $x_* = 0$ абсолютно устойчиво.

Предлагается метод решения следующей задачи: найти критерий абсолютной устойчивости положения равновесия системы (1), (2);

Основные леммы

Лемма 1. *Пусть матрица SB порядка $m \times m$ не особая. Тогда вдоль решения системы (1), (2) верны тождества*

$$\varphi(\sigma(t)) = (SB)^{-1}\omega(t) - (SB)^{-1}SAx(t), \ \omega(t) = \dot{\sigma}(t), \ t \in I, \tag{3}$$

$$\dot{x}(t) = [A - B(SB)^{-1}SA]x(t) + B(SB)^{-1}\omega(t), \ t \in I, \tag{4}$$

Подробное доказательство леммы 1 приведено в [1].

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1, и, кроме того, матрицы $\tau_1 = diag(\tau_{11},\tau_{12},\ldots,\tau_{1m})$, $\tau_2 = diag(\tau_{21},\tau_{22},\ldots,\tau_{2m})$ такие, что*

$$\tau_2 = \begin{cases} 0, & \text{если } \tau_1 \le 0, \\ \mu_0\tau_1, & \text{если } \tau_2 > 0, \end{cases} \quad \overline{\varphi}(\sigma) = \begin{cases} \varphi(\sigma), & \text{если } \tau_1 \le 0, \\ \varphi(\sigma) - \mu_0\sigma, & \text{если } \tau_1 > 0, \end{cases}$$

$$\ell_0 = \begin{cases} -\int\limits_0^{\sigma(0)} \varphi^*(\sigma)\tau_1 d\sigma = -\sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_0^{\sigma_i(0)} \varphi_i(\sigma_i)\tau_{1i} d\sigma_i, \text{ если } \tau_1 \le 0, \\ -\int\limits_0^{\sigma(0)} [\varphi(\sigma) - \mu_0\sigma]^* \tau_1 d\sigma = -\sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_0^{\sigma_i(0)} [\varphi_i(\sigma_i) - \mu_{0i}\sigma_i]\tau_{1i} d\sigma_i, \text{ если } \tau_1 > 0, \end{cases}$$

где (*) – знак транспонирования.
Тогда, вдоль решения системы (1), (2) верно равенство

$$I_1 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T [\omega^*(t)M_1\omega(t) + \omega^*(t)M_2 x(t)]dt =$$

$$= \ell_0 + \lim_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)} \overline{\varphi}^*(\sigma)\tau_1 d\sigma + \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\sigma^*(T)\tau_2\sigma(T) - \frac{1}{2}\sigma_0^*\tau_2\sigma_0, \tag{5}$$

где матрицы $M_1 = (SB)^{*-1}\tau_1$, $M_2 = -\tau_1(SB)^{-1}SA$.

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1 из [2].

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы 1, и пусть, кроме того, матрицы* $H_i = H_i^*$, $i = \overline{1,n}$ *порядков* $n\times n$ *такие, что*

$$B^*H_1 = \Gamma_0 S,\ B^*H_2 = \Gamma_1 SA,\ \ldots,\ B^*H_n = \Gamma_{n-1}SA^{n-1}, \tag{6}$$

где Γ_0, Γ_1, ..., Γ_{n-1} *– матрицы порядков* $m\times m$.

Тогда для любых симметричных матриц $H_0 = H_0^*$, $H_i = H_i^*$, $i = \overline{1,n}$ *порядков* $n\times n$, *вдоль решения системы (1), (2) верно равенство*

$$I_2 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T [\omega^*(t)N_2 x(t) + x^*(t)N_3 x(t)]dt =$$

$$= -\lim_{T\to\infty} x^*(T)[H_0 + H_1 + \ldots + H_n]x(T) + x_0^*[H_0 + H_1 + \ldots + H_n]x_0, \tag{7}$$

где матрицы

$$N_2 = -2(SB)^{*-1}\left(B^*H_0 + \Gamma_0 S + \Gamma_1 SA + \ldots + \Gamma_{n-1}SA^{n-1}\right), \tag{8}$$

$$N_3 = -2A^*(H_0 + H_1 + \ldots + H_n) + 2A^*S^*(SB)^{*-1}\left(B^*H_0 + \Gamma_0 S + \ldots + \Gamma_{n-1}SA^{n-1}\right). \tag{9}$$

Доказательство леммы 3 основывается на свойствах симметричных матриц $H_0 = H_0^*$ и $H_i = H_i^*$, $i = \overline{1,n}$. Со схемой доказательства леммы 3 можно познакомиться в [3] (лемма 4)

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы 1, и, пусть, кроме того, существует матрица* θ *порядка* $m\times n$, *такая, что* $\theta B = 0$. *Тогда для любых симметричных матриц* $K = K^*$, $K_1 = K_1^*$ *порядков* $m\times m$, *вдоль решения системы (1), (2) верно равенство*

$$I_3 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T [\omega^*(t)N_4 x(t) + x^*(t)N_5 x(t)]dt =$$

$$= -\lim_{T\to\infty} x^*(T)[\theta^*K\theta + A^*\theta^*K_1\theta A]x(T) + x_0^*[\theta^*K\theta + A^*\theta^*K_1\theta A]x_0, \tag{10}$$

где матрицы

$$N_4 = -2(SB)^{*-1}B^*A^*\theta^*K_1\theta A, \tag{11}$$

$$N_5 = -2A^*\theta^*K\theta - 2A^{*2}\theta^*K_1\theta A + 2A^*S^*(SB)^{*-1}B^*A^*\theta^*K_1\theta A. \tag{12}$$

Доказательство. Так как выполнены условия леммы 1, то верны тождества (3), (4). Умножая тождества (4) слева на θ, с учетом того, что $\theta B = 0$, получим

$$\theta\dot{x}(t) = \theta Ax(t) - \theta B(SB)^{-1}SAx(t) + \theta B(SB)^{-1}\omega(t) = \theta Ax(t),\ t\in I. \tag{13}$$

Для любой симметричной матрицы $K = K^*$ порядка $m \times m$ верны равенства

$$-2\lim_{T\to\infty}\int_0^T \dot{x}^*(t)\theta^* K\theta x(t)dt = -\lim_{T\to\infty} x^*(T)\theta^* K\theta x(T) + x_0^*\theta^* K\theta x_0, \tag{14}$$

$$-2\dot{x}^*(t)\theta^* K\theta x(t) = -2x^*(t)A^*\theta^* K\theta x(t),\ t\in I. \tag{15}$$

Как следует из тождества (13) верно соотношение

$$\theta\dot{x}(t) = \theta A\dot{x}(t) = \theta A^2 x(t) - \theta AB(SB)^{-1}SAx(t) + \theta AB(SB)^{-1}\omega(t),\ t\in I. \tag{16}$$

Для любой симметричной матрицы $K_1 = K_1^*$ порядка $m \times m$ верно равенство

$$-2\lim_{T\to\infty}\int_0^T \ddot{x}^*(t)\theta^* K_1\theta\dot{x}(t)dt = -\lim_{T\to\infty}\dot{x}^*(T)\theta^* K_1\theta\dot{x}(T) + \dot{x}_0^*\theta^* K_1\theta\dot{x}_0. \tag{17}$$

Заметим, что $\theta\dot{x}(t) = \theta Ax(t)$, $t\in I$, $\theta\dot{x}_0 = \theta Ax_0$. Теперь равенство (17), с учетом тождества (16) запишется в виде

$$-2\lim_{T\to\infty}\int_0^T \ddot{x}^*(t)\theta^* K_1\theta\dot{x}(t)dt = -\lim_{T\to\infty} x^*(T)A^*\theta^* K_1\theta Ax(T) + x_0^* A^*\theta^* K_1\theta Ax_0, \tag{18}$$

$$-2x^*(t)\theta^* K_1\theta\dot{x}(t) = -2\left[\theta A^2 x(t) - \theta AB(SB)^{-1}SAx(t) + \theta AB(SB)^{-1}\omega(t)\right]^* K_1\theta Ax(t) =$$

$$= -2\omega^*(t)(SB)^{*-1}B^*A^*\theta^* K_1\theta Ax(t) + x^*(t)\left[-2A^{*2}\theta^* K_1\theta A + +2A^*S^*(SB)^{*-1}B^*A^*\theta^* K_1\theta A\right]x(t).\ t\in I \tag{19}$$

Суммируя (14), (18), с учетом (15), (19), получим (10). Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия лемм 1–4. Тогда для любых симметричных матриц $W_0 = W_0^* \ge 0$, $W_1 = W_1^* \ge 0$ порядков $m\times m$, $n\times n$ соответственно, вдоль решения системы (1), (2) справедлива следующая оценка несобственного интеграла*

$$I_4 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T\left[\omega^*(t)R_1\omega(t) + \omega^*(t)R_2x(t) + x^*(t)R_3x(t)\right]dt \le$$

$$\le \ell_0 + \lim_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)}\overline{\varphi}^*(\sigma)\tau_1 d\sigma - \lim_{T\to\infty} x^*(T)\Pi_0 x(T) + x_0^*\Pi_0 x_0, \tag{20}$$

где матрицы

$$\Pi_0 = H_0 + \sum_{i=1}^n H_i - \frac{1}{2}S^*\tau_2 S + \theta^* K\theta + A^*\theta^* K_1\theta A, \tag{21}$$

$$R_1 = \frac{1}{2}(SB)^{*-1}\tau_1 + \frac{1}{2}\tau_1(SB)^{-1} - W_0, \tag{22}$$

$$R_2 = -2(SB)^{*-1}\left(B^*H_0 + \Gamma_0 S + \Gamma_1 SA + \ldots + \Gamma_{n-1}SA^{n-1}\right) - \tau_1(SB)^{-1}SA - 2(SB)^{*-1}B^*A^*\theta^* K_1\theta A, \tag{23}$$

$$R_3 = -2A^*\left(H_0 + \sum_{i=1}^n H_i\right) + 2A^*S^*(SB)^{*-1}\left(B^*H_0 + \Gamma_0 S + \ldots + \Gamma_{n-1}SA^{n-1}\right) -$$

$$-2A^*\theta^* K\theta - 2A^{*2}\theta^* K_1\theta A + 2A^*S^*(SB)^{*-1}B^*A^*\theta^* K_1\theta A - W_1. \tag{24}$$

Доказательство леммы строится на суммировании несобственных интегралов (5), (7), (10).

Лемма 6. *Пусть выполнены условия леммы 1, функция $\varphi(\sigma)\in\Phi_0$. Тогда для любой диагональной матрицы $P = P^* > 0$ порядка $m\times m$, вдоль решения системы (1), (2) верно равенство*

$$0 \le I_5 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \varphi^*(\sigma(t))P\left[\sigma(t) - \mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t))\right]dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T\left[\omega^*(t)T_1\omega(t) + \omega^*(t)T_2x(t) + x^*(t)T_3x(t)\right]dt, \tag{25}$$

где матрицы

$$T_1 = -(SB)^{*-1} P\mu_0^{-1}(SB)^{-1},$$

$$T_2 = (SB)^{*-1} PS + 2(SB)^{*-1} P\mu_0^{-1}(SB)^{-1} SA,$$

$$T_3 = -A^* S^*(SB)^{*-1} PS - A^* S^*(SB)^{*-1} P\mu_0^{-1}(SB)^{-1} SA. \tag{26}$$

Доказательство леммы 6 следует из свойств включения $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$, аналогично лемме 3 из [2].

Лемма 7. *Пусть выполнены условия лемм 5,6, и пусть, кроме того*

$$\mu_0 = \left[(SB)^* W_0(SB) - \frac{1}{2}\tau_1(SB) - \frac{1}{2}(SB)^*\tau_1\right]^{-1} P, \tag{27}$$

$$2(SB)^{*-1} B^* H_0 = \left[-(SB)^{*-1} P - 2(SB)^{*-1}\Gamma_0\right]S + \left[(SB)^{*-1}\tau_1 - 2W_0 - 2(SB)^{*-1}\Gamma_1\right]SA -$$

$$- 2(SB)^{*-1}\left(\Gamma_2 SA^2 + \ldots + \Gamma_{n-1} SA^{n-1}\right) - 2(SB)^{*-1} B^* A^* \theta^* K_1 \theta A, \tag{28}$$

$$0 = -2A^*\left(H_0 + \sum_{i=1}^{n} H_i\right) - A^* S^* W_0 SA - W_1 - 2A^*\theta^* K\theta - 2A^{*2}\theta^* K_1\theta A. \tag{29}$$

Тогда, вдоль решения системы (1), (2) справедлива следующая оценка

$$0 \le I_5 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \varphi^*(\sigma(t))P\left[\sigma(t) - \mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t))\right]dt \le \ell_0 +$$

$$+ \lim_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)} \overline{\varphi}^*(\sigma)\tau_1 d\sigma - \lim_{T\to\infty} x^*(T)\Pi_0 x(T) + x_0^*\Pi_0 x_0. \tag{30}$$

Доказательство леммы 7 следует из равенства несобственных интегралов I_4 и I_5.

Лемма 8. *Пусть выполнены условия лемм 1–5. Тогда, для любой матрицы $P = P^* \ge 0$ порядка $m \times m$, вдоль решения системы (1), (2) справедлива следующая оценка несобственного интеграла*

$$I_6 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left\{\omega^*(t)Q_1\omega(t) + \omega^*(t)Q_2 x(t) + x^*(t)Q_3 x(t)\right\}dt \le$$

$$\le \ell_0 + \lim_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)} \overline{\varphi}^*(\sigma)\tau_1 d\sigma - \lim_{T\to\infty} x^*(T)\Pi_0 x(T) + x_0^*\Pi_0 x_0, \tag{31}$$

где матрицы

$$Q_1 = \frac{1}{2}(SB)^{*-1}\tau_1 + \frac{1}{2}\tau_1(SB)^{-1} - W_0 + (SB)^{*-1} P\mu_0^{-1}(SB)^{-1}, \tag{32}$$

$$Q_2 = -2(SB)^{*-1}\left(B^* H_0 + \Gamma_0 S + \Gamma_1 SA + \ldots + \Gamma_{n-1} SA^{n-1}\right) - \tau_1(SB)^{-1} SA -$$

$$- 2(SB)^{*-1} B^* A^* \theta^* K_1 \theta A - (SB)^{*-1} PS - 2(SB)^{*-1} P\mu_0^{-1}(SB)^{-1} SA, \tag{33}$$

$$Q_3 = -2A^*\left(H_0 + \sum_{i=1}^{n} H_i\right) + 2A^* S^*(SB)^{*-1}\left(B^* H_0 + \Gamma_0 S + \Gamma_1 SA + \ldots + \Gamma_{n-1} SA^{n-1}\right) -$$

$$- 2A^*\theta^* K\theta - 2A^{*2}\theta^* K_1\theta A + 2A^* S^*(SB)^{*-1} B^* A^*\theta^* K_1\theta A - W_1 +$$

$$+ A^* S^*(SB)^{*-1} PS + A^* S^*(SB)^{*-1} P\mu_0^{-1}(SB)^{-1} SA. \tag{34}$$

Лемма 8 доказывается путем разности несобственных интегралов I_4, I_5

Лемма 9. *Пусть выполнены условия леммы 1, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Тогда, для любых матриц Σ, W, $P_1 = P_1^* > 0$ порядков $m \times m$, вдоль решения системы (1), (2) верно равенство*

$$0 \le I_7 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\dot{\sigma}(t) + \Sigma\sigma(t) + W\varphi(\sigma(t))\right]^* P_1\left[\dot{\sigma}(t) + \Sigma\sigma(t) + W\varphi(\sigma(t))\right]dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\omega^*(t)E_1\omega(t) + \omega^*(t)E_2 x(t) + x^*(t)E_3 x(t)\right]dt, \tag{35}$$

где матрицы

$$E_1 = \left[I_m + W(SB)^{-1}\right]^* P_1 \left[I_m + W(SB)^{-1}\right], \tag{36}$$

$$E_2 = 2\left[I_m + W(SB)^{-1}\right]^* P_1 \left[\Sigma S - W(SB)^{-1} SA\right], \tag{37}$$

$$E_3 = \left[\Sigma S - W(SB)^{-1} SA\right]^* P_1 \left[\Sigma S - W(SB)^{-1} SA\right]. \tag{38}$$

Доказательство. Как следует из леммы 1, сумма

$$\dot{\sigma}(t) + \Sigma\sigma(t) + W\varphi(\sigma(t)) = \left[I_m + W(SB)^{-1}\right]\omega(t) + \left[\Sigma S - W(SB)^{-1} SA\right]x(t),\ t \in I.$$

Тогда

$$0 \le \left[\dot{\sigma}(t) + \Sigma\sigma(t) + W\varphi(\sigma(t))\right]^* P_1 \left[\dot{\sigma}(t) + \Sigma\sigma(t) + W\varphi(\sigma(t))\right] =$$
$$= \left[\omega^*(t)E_1\omega(t) + \omega^*(t)E_2 x(t) + x^*(t)E_3 x(t)\right],\ t \in I,$$

где матрицы E_1, E_2, E_3 определяются формулами (36)–(38) соответственно. Интегрируя данное тождество, получим равенство (35). Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть выполнены условия лемм 8,9, и пусть, кроме того*

$$\mu_0 = \left[(SB)^* W_0 (SB) - \frac{1}{2}\tau_1 (SB) - \frac{1}{2}(SB)^* \tau_1 + (W + SB)^* P_1 (W + SB)\right]^{-1} P, \tag{39}$$

$$2(SB)^{*-1} B^* H_0 = \left[-(SB)^{*-1} P - 2(SB)^{*-1}\Gamma_0 - 2P_1\Sigma - 2(SB)^{*-1} W^* P_1 \Sigma\right] S +$$
$$+ \left[(SB)^{*-1}\tau_1 - 2W_0 - 2(SB)^{*-1}\Gamma_1 - 2P_1 - 2(SB)^{*-1} W^* P_1\right] SA -$$
$$- 2(SB)^{*-1}\left(\Gamma_2 SA^2 + \ldots + \Gamma_{n-1} SA^{n-1}\right) - 2(SB)^{*-1} B^* A^* \theta^* K_1 \theta A, \tag{40}$$

$$0 = -2A^*\left(H_0 + \sum_{i=1}^{n} H_i\right) - S^*\Sigma^* P_1 \Sigma S - 2A^* S^* P_1 \Sigma S + A^* S^*\left(-W_0 - P_1\right) SA - 2A^*\theta^* K\theta - 2A^{*2}\theta^* K_1 \theta A - W_1. \tag{41}$$

Тогда, вдоль решения системы (1), (2) справедлива следующая оценка

$$0 \le I_7 = \lim_{T\to\infty} \int_0^T \left[\dot{\sigma}(t) + \Sigma\sigma(t) + W\varphi(\sigma(t))\right]^* P_1 \left[\dot{\sigma}(t) + \Sigma\sigma(t) + W\varphi(\sigma(t))\right] dt \le$$
$$\le \ell_0 + \lim_{T\to\infty} \int_0^{\sigma(T)} \overline{\varphi}^*(\sigma)\tau_1 d\sigma - \lim_{T\to\infty} x^*(T)\Pi_0 x(T) + x_0^* \Pi_0 x_0. \tag{42}$$

Доказательство леммы 10 следует из равносильности $Q_i = E_i$, $i = 1,2,3$ и равенства интегралов I_6 и I_7.

Лемма 11. *Пусть матрица A – гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$, вдоль решения системы (1), (2) предел $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(\sigma(t)) = 0$. Тогда $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$.*

Доказательство. Из включения $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ следует, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\sigma) = k(\sigma)\sigma$, $0 \le k(\sigma) \le \mu_0$. Поскольку, $\varphi(\sigma) \in C(R^m, R^m)$, то вдоль решения системы (1), (2) предел $\lim\limits_{t\to\infty} \sigma(t) = 0$, $k(0) = 0$. Теперь уравнение (1) запишется следующим образом

$$\dot{x} = Ax + Bk(\sigma(t))Sx(t),\ x(0) = x_0,\ t \in I = [0, \infty), \tag{43}$$

где $\lim\limits_{t\to\infty} k(\sigma(t)) = 0$, $k(\sigma(t))$, $t \in I$ – непрерывная функция.

Решение дифференциального уравнения (43) имеет вид

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bk(\tau) Sx(\tau) d\tau,\ t \in I,$$

где $\left\|e^{At}\right\| \le ce^{(\alpha+\varepsilon)t}$, $t \in I$.

Тогда $|x(t)| = ce^{(\alpha+\varepsilon)t}|x_0| + \int_0^t ce^{(\alpha+\varepsilon)(t-\tau)}\|Bk(\tau)S\||x(\tau)|d\tau$, $t \in I$. Умножая данное неравенство на $e^{-(\alpha+\varepsilon)t}$, получим

$$e^{-(\alpha+\varepsilon)t}|x(t)| \le c|x_0| + \int_0^t c\|Bk(\tau)S\|e^{-(\alpha+\varepsilon)\tau}|x(\tau)|d\tau,\ t \in I. \tag{44}$$

Пусть функция $u(t) = e^{-(\alpha+\varepsilon)t}|x(t)|$, $t \in I$. Заметим, что $u(t) \ge 0$, $t \in I$, $u(t) \in C(I, R^1)$. Теперь, неравенство (44) запишется в виде

$$u(t) \le c|x_0| + \int_0^t c\|Bk(\tau)S\|u(t)d\tau,\ t \in I, \tag{45}$$

где $\|Bk(t)S\| \in C(I, R^1)$. Применив к неравенству (45) метод Грануолла – Беллмана, получим $u(t) \le c|x_0|e^{c\int_0^t \|Bk(\tau)S\|d\tau}$, $t \in I$.

Следовательно, $e^{-(\alpha+\varepsilon)t}|x(t)| \le c|x_0|e^{c\int_0^t \|Bk(\tau)S\|d\tau}$, $t \in I$. Тогда

$$|x(t)| \le c|x_0|e^{(\alpha+\varepsilon)t}e^{c\int_0^t \|Bk(\tau)S\|d\tau},\ t \in I. \tag{46}$$

Пусть, функция $f(t) = \int_0^t \|Bk(\tau)S\|d\tau$. Отметим, что согласно обобщению правила Лопиталя, $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{\|Bk(t)S\|}{1} = 0$. Отсюда следует, что $f(t) = \int_0^t \|Bk(\tau)S\|d\tau \le \varepsilon_1 t$ при $t > T$, где $T > 0$ – достаточно большое число, $\varepsilon_1 > 0$ – достаточно малое число, такое, что $\varepsilon = c\varepsilon_1$. Теперь оценка (46) запишется так $|x(t)| \le c|x_0|e^{(\alpha+2\varepsilon)t}$, при $t > T$, $t \in I$. Тогда $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Лемма доказана.

Критерий абсолютной устойчивости

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) Матрицы A, $A + B\mu S$, $0 \le \mu \le \bar{\mu}_0$, $\mu_0 \le \bar{\mu}_0$ – гурвицевы;

2) Матрицы SB, $SA^{-1}B$ не особые;

3) Матрицы H_0, H_i, $i = \overline{1,n}$, Γ_i, $i = \overline{0,n-1}$, θ, $P = P^* > 0$, $W_0 = W_0^* \ge 0$, $W_1 = W_1^* \ge 0$, K, K_1, τ_1, τ_2 такие, что

$$\theta B = 0,\ B^* H_i = \Gamma_{i-1} SA^{i-1},\ i = \overline{1,n},$$

$$\Pi_0 = H_0 + \sum_{i=1}^{n} H_i - \frac{1}{2}S^*\tau_2 S + \theta^* K\theta + A^*\theta^* K_1 \theta A > 0$$

и выполнены равенства (27)–(29);

4) Функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ непрерывна по σ, $\sigma \in R^m$.

Тогда положение равновесия системы (1), (2) абсолютно устойчиво.

Доказательство. Так как матрицы SB, $SA^{-1}B$ не особые, то система (1), (2) имеет единственное положение равновесия. Из гурвицевости матриц A, $A + B\mu S$ следует существование матрицы A^{-1} и асимптотическая устойчивость положения равновесия при малых начальных отклонениях.

Из условия 3) следует, что верны оценки (7), (10), (20), (30). Из оценки (30) имеем

$$0 \le I_5 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T V(\sigma(t))dt \le \ell_0 + \lim_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)} \overline{\varphi}^*(\sigma)\tau_1 d\sigma - \lim_{T\to\infty} x^*(T)\Pi_0 x(T) + x_0^*\Pi_0 x_0, \qquad (47)$$

где $V(\sigma(t)) = \varphi^*(\sigma(t))P\left[\sigma(t) - \mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t))\right]$, $t \in I$, диагональная матрица, $P = P^* > 0$, $\Pi_0 = \Pi_0^* > 0$.

Из леммы 2 следует $\lim\limits_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)} \overline{\varphi}^*(\sigma)\tau_1 d\sigma \le 0$. Покажем, что при $P = P^* > 0$, $\Pi_0 > 0$, решение системы (1), (2) ограниченно. Предположим противное. Тогда $-\lim\limits_{T\to\infty} x^*(T)\Pi_0 x(T) = -\infty$ (возможно, что $\lim\limits_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)} \overline{\varphi}^*(\sigma)\tau_1 d\sigma = -\infty$), и неравенство (47) запишется так $0 \le \lim\limits_{T\to\infty}\int_0^T \varphi^*(\sigma(t))P\left[\sigma(t) - \mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t))\right]dt \le -\infty$. Этого не может быть, следовательно, решение системы (1), (2) ограниченно, т.е. $|x(t)| \le c_0$, $\forall t$, $t \in I = [0,\infty)$. Тогда $|\sigma(t)| \le \|S\||x(t)| \le c_2$, $\forall t$, $t \in I$, $|\varphi(\sigma(t))| \le \varphi_*$, $t \in I$, в силу ограниченности $\sigma(t)$, $t \in I$ и непрерывности функции $\varphi(\sigma)$, $\sigma \in R^m$. Поскольку, $\dot{x}(t) = Ax(t) + B\varphi(\sigma(t))$, $\dot{\sigma}(t) = S\dot{x}(t)$, то $|\dot{x}(t)| \le \|A\||x(t)| + \|B\||\varphi(\sigma(t))| \le c_1$, $|\dot{\sigma}(t)| \le \|S\||\dot{x}(t)| \le c_3$, $t \in I$. Следовательно, функции $x(t)$, $\sigma(t)$, $t \in I$ – равномерно непрерывны.

Из ограниченности $x(t)$, $t \in I$ следует, что оценка (47) запишется в виде

$$0 \le \lim_{T\to\infty}\int_0^T V(\sigma(t))dt < \infty, \qquad (48)$$

где $V(\sigma) > 0$, $\forall\sigma$, $\sigma \in R^m$ – непрерывная функция, $V(0) = 0$; $\sigma(t)$, $t \in I$ – равномерно непрерывная функция. Тогда $\sigma(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Так как $\varphi(0) = 0$, то $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(\sigma(t)) = 0$. Поскольку A – гурвицева, матрица $\varphi(\sigma(t)) \to 0$ при $t \to \infty$, то выполнены условия леммы 11. Тогда $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Так как матрицы A, $A + B\mu S$, $0 \le \mu \le \overline{\mu}_0$, $\mu_0 \le \overline{\mu}_0$ – гурвицевы, $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to\infty} x(t;0,x_0,\varphi) = 0$, $\forall\varphi$, $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$, $\forall x_0$, $|x_0| < \infty$, то положение равновесия системы (1), (2) абсолютно устойчиво.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айсагалиев С.А., Шаназаров Д.Г.* Асимптотические свойства решений регулируемых систем с ограничениями в основном случае // Журнал «Поиск». Серия естественно-технических наук. 2007. №3. С. 201-209.

2. *Айсагалиев С.А., Шаназаров Д.Г.* К абсолютной устойчивости регулируемых систем в основном случае // Вестник НАН РК. 2007. №4. С. 3-8.

3. *Айсагалиев С.А., Шаназаров Д.Г.* Асимптотические свойства решений регулируемых систем в основном случае // Вестник КазНУ. 2007. №2(53). С. 100-109.

Резюме

Негізгі жағдайдағы сызықты емес реттелетін жүйелер шешімдерінің асимптотикалық қасиеттері зерттелді. Меншіксіз интегралдық бағалау негізінде динамикалық жүйенің шешімдер жиынында абсолютты орнықтылықтың критерийі анықталды.

Summary

The asymptotical properties of the solutions of nonlinear regular systems in the basic case are regarded. The new method of defining the domain of absolute stability of regular systems has been developed on the base of evaluation of improper integrals on the solution set of the given dynamic system.

КазНУ им. аль-Фараби

Поступила 24.09.08г.