УДК 517.956

Г.С. АЙТКАЛИЕВ

ЗАДАЧА ДАРБУ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

В работе доказана корректность задачи Дарбу для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений четного порядка.

Пусть D_0 - конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $x=(x_1,...,x_m,t)$, ограниченная поверхностями $|x|=\frac{2}{2+p}t^{(2+p)/2}$, $|x|=1-\frac{2}{2+p}t^{(2+p)/2}$ и плоскостью t =0, где $|x|$ - длина вектора $x=(x_1,...,x_m)$, $0\le t\le\left(\frac{(2+p)}{4}\right)^{\frac{2}{2+p}}$, $p=const>0$.

Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_0 области D_0, обозначим через S_0, S_1 и S соответственно.

В области D_0 рассмотрим вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения четного порядка

$$L^n u\equiv(t^p\Delta_x-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\sum_{i=1}^{m}a_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}+$$

$$+b(x,t)\frac{\partial}{\partial t}+c(x,t))^n u=0\ , \qquad (1)$$

где Δ_x -оператор Лапласа по переменным $x_1,...,x_m, m\ge 2$, а 1< n – целое число, на важность исследования которых обратил внимание еще А.В.Бицадзе ([1]).

Рассмотрим многомерный аналог задачи Дарбу для уравнения (1) ([2]).

Задача 1. Найти в области D_0 решение уравнения (1) из класса $C^{2n-1}(\overline{D_0})\cap C^{2n}(D_0)$, удовлетворяющее краевым условиям
или

$$\frac{\partial}{\partial t}L^j u\big|_S=\nu_j(x),\quad L^j u\big|_{S_1}=\varphi_j(x),\quad j=\overline{0,n-1}. \qquad (3)$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x=(x_1,...,x_m,t)$ к сферическим

$$a_i(r,\theta,t)\rho(\theta), a_i\frac{x_i}{r}\rho, b(r,\theta,t)\rho, c(r,\theta,t)\rho,$$

$$\rho(\theta),\tau_j(r,\theta),\varphi_j(r,\theta), i=1,...,m, j=\overline{0,n-1}$$

$$r,\theta_1,...,\theta_{m-1}, r\ge 0, 0\le\theta_1<2\pi, 0<\theta_i<\pi,$$

$i=2,...,m-1$, сохранив обозначения, использованные в [3].

Пусть $\{Y^k_{n,m}(\theta)\}$ - система линейно независимых сферических функций порядка $n, 1\le k\le k_n, (m-2)!n!k_n=(n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta=(\theta_1,...,\theta_{m-1}), W_2^l(S), l=0,1,...$ - пространства Соболева, а $\widetilde{S}=\left\{(r,\theta)\in S, 0<r<\frac{1}{2}\right\}$.

Через

$$\widetilde{a}^k_{in}(r,t), a^k_{in}(r,t), \widetilde{b}^k_n(r,t), \widetilde{c}^k_n(r,t), \rho^k_n, \overline{\tau}^k_{jn}(r,t), \overline{\varphi}^k_{jn}(r,t)$$

обозначим коэффициенты разложения по сферическим функциям $\{Y^k_{n,m}(\theta)\}$ соответственно функций

$$a_i(r,\theta,t)\rho(\theta), a_i\frac{x_i}{r}\rho, b(r,\theta,t)\rho, c(r,\theta,t)\rho, \rho(\theta),$$

$$\tau_j(r,\theta),\varphi_j(r,\theta), i=1,...,m, j=\overline{0,n-1}.$$

Пусть

$$a_i(x,t), b(x,t), c(x,t)\in W_2^l(D_0)\cap C^{2n-1}(\overline{D_0}),$$

$$i=1,...,m, l\ge 2n+m-2.$$

Тогда имеет место

Теорема 1. Если

$$\tau_j(r,\theta)=r^4\tau_j^*(r,\theta), \nu_j(r,\theta)=r^4\nu_j^*(r,\theta),$$

$$\varphi_j(r,\theta)=\left(r-\frac{1}{2}\right)^{(m+5)/2}\varphi_j^*(r,\theta),$$

$$\tau_j^*(r,\theta),\nu_j^*(r,\theta)\in W_2^l(S),$$

$$\varphi_j^*(r,\theta)\in W_2^l(S\setminus\widetilde{S}),\ j=\overline{0,n-1},\ l>(3n+3m)/2,$$

то задача 1 однозначно разрешима.

Докажем теорему 1 индукцией по n.

Пусть $n=2$. Если ввести новую неизвестную функцию $\vartheta(x,t)=Lu$, то задача 1 распадается на две следующие задачи.

Задача 2. Найти в области D_0 решение уравнения $L\vartheta=0$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\vartheta|_S=\tau_1(x),\quad \vartheta|_{S_1}=\varphi_1(x),$$

или

$$\vartheta_t|_S=\nu_1(x),\quad \vartheta|_{S_1}=\varphi_1(x).$$

Задача 3. Найти в области D_0 решение уравнения

$$Lu=\vartheta(x,t), \tag{4}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_S=\tau_0(x),\quad u|_{S_1}=\varphi_0(x), \tag{5}$$

или

$$u_t|_S=\nu_0(x),\quad u|_{S_1}=\varphi_0(x). \tag{6}$$

В работе [4] показано, что задача 2 имеет единственное решение, которое имеет вид

$$\vartheta(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\overline{\vartheta}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{7}$$

где функции $\overline{\vartheta}_n^k(r,t)$ находятся из двумерных задач Дарбу.

Теперь будем доказывать теорему 1. Сначала докажем единственность решения задачи 1. Пусть $\tau_j\equiv 0,\nu_j\equiv 0,\varphi_j=0,\ j=0,1$. Тогда из [4] вытекает, что решение задачи 2 $\vartheta(x,t)\equiv 0$. Откуда следует также, что решение задачи 3 $u(x,t)\equiv 0$.

Теперь переходим к разрешимости задачи 1. Сначала рассмотрим задачу (1),(2) и для её решения достаточно решить задачу (4),(5), где $\vartheta(x,t)$ определяется из (7).

Решение $u(r,\theta,t)$ ищем в виде ряда

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\overline{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{8}$$

где функции $\overline{u}_n^k(r,t)$ – функции, которые будут определены ниже.

Тогда, аналогично, как в [3,4], с учётом (7) для $\overline{u}_n^k(r,t)$ получим ряд

$$t^p\rho_0^1\overline{u}_{0rr}^1-\rho_0^1\overline{u}_{0tt}^1+\left(\frac{m-1}{r}t^p\rho_0^1+\sum_{i=1}^{m}a_{i0}^1\right)\overline{u}_{0r}^1+$$

$$+\widetilde{b}_0^1\overline{u}_{0t}^1+\widetilde{c}_0^1\overline{u}_0^1-\overline{\rho}_0^1\overline{\vartheta}_0^1+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\Big\{t^p\rho_n^k\overline{u}_{nrr}^k-\rho_n^k\overline{u}_{ntt}^k+$$

$$+\left(\frac{m-1}{r}t^p\rho_n^k+\sum_{i=1}^{m}a_{in}^k\right)\overline{u}_{nr}^1+\widetilde{b}_n^k\overline{u}_{nt}^k+$$

$$+\left[\widetilde{c}_n^k-\frac{\lambda_n t^p\rho_n^k}{r^2}+\sum_{i=1}^{m}\left(\widetilde{a}_{in-1}^k-na_{in}^k\right)\right]\overline{u}_n^k-\rho_n^k\overline{\vartheta}_n^k\Big\}=0, \tag{9}$$

$$\lambda_n=n(n+m-2)$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$t^p\rho_0^1\overline{u}_{0rr}^1-\rho_0^1\overline{u}_{0tt}^1+\frac{m-1}{r}t^p\rho_0^1\overline{u}_{0r}^1=\rho_0^1\overline{\vartheta}_0^1, \tag{10}$$

$$t^p\rho_1^k\overline{u}_{1rr}^k-\rho_1^k\overline{u}_{1tt}^k+\frac{m-1}{r}t^p\rho_1^k\overline{u}_{1r}^k-$$

$$-\frac{\lambda_1}{r^2}t^p\rho_1^k\overline{u}_1^k=\rho_1^k\overline{\vartheta}_1^k-$$

$$-\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=0}^{m}a_{i0}^1\overline{u}_{0r}^1+\widetilde{b}_0^1\overline{u}_{0t}^1+\widetilde{c}_0^1\overline{u}_0^1\right),\quad n=1,k=\overline{1,k_1}, \tag{11}$$

$$t^p\rho_n^k\overline{u}_{nrr}^k-\rho_n^k\overline{u}_{ntt}^k+\frac{m-1}{r}t^p\rho_n^k\overline{u}_{nr}^k-$$

$$-\frac{\lambda_n}{r^2}t^p\rho_n^k\overline{u}_n^k=\rho_n^k\overline{\vartheta}_n^k-$$

$$-\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\Bigg\{\sum_{i=1}^{m}a_{in-1}^k\overline{u}_{n-1r}^1+\widetilde{b}_{n-1r}^1\overline{u}_{n-1t}^1+$$

$$+\left[\widetilde{c}_{n-1}^1+\sum_{i=1}^{m}(\widetilde{a}_{in-2}^k-(n-1)a_{in-1}^k)\right]\overline{u}_{n-1}^k\Bigg\}, \tag{12}$$

$$k=\overline{1,k_n},n=2,3,\ldots.$$

Далее, из краевого условия (5), в силу (8), будем иметь

$$\bar{u}_n^k(r,0)=\bar{\tau}_{0n}^k(r),\bar{u}_n^k\left[r,\left(\frac{(2+p)(1-r)}{2}\right)^{\frac{2}{2+p}}\right]=$$

$$=\bar{\varphi}_{0n}^k(r),k=\overline{1,k_n},n=0,1,\ldots. \qquad (13)$$

Нетрудно показать, что если $\{\bar{u}_n^k\}$, $k=\overline{1,k_n},n=0,1,\ldots$ – решение системы (10)–(12), то оно является и решением уравнения (9).

Таким образом, задача (4),(5) сведена к системе задач Дарбу для уравнений (10) – (12). Теперь будем искать решение этих задач.

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (10) – (12) можно представить в виде

$$t^p\bar{u}_{nrr}^k-\bar{u}_{ntt}^k+\frac{m-1}{r}t^p\bar{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}t^p\bar{u}_n^k=\bar{\vartheta}_n^k+\bar{f}_n^k(r,t), \qquad (14)$$

где $\bar{f}_n^k(r,t)$ определяется из предыдущих уравнений этой системы, при этом $\bar{f}_0^k(r,t)\equiv 0$.

В (14), проведя замену переменных $\bar{u}_n^k(r,t)=r^{(1-m)/2}u_n^k(r,t)$ и положив затем $r=r,x_0=\dfrac{2}{2+p}t^{(2+p)/2}$, получим уравнение

$$L_\alpha u_{\alpha,n}^k\equiv u_{\alpha,nrr}^k-u_{\alpha,nx_0x_0}^k-\frac{\alpha}{x_0}u_{\alpha,nx_0}^k+$$

$$+\frac{[(m-1)(3-m)-4\lambda_n]}{4r^2}u_{\alpha,n}^k=f_{\alpha,n}^k(r,x_0), \qquad (15)$$

$$0<\alpha=\frac{p}{2+p}<1,f_{\alpha,n}^k(r,x_0)=r^{(m-1)/2}\left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{-2\alpha}$$

$$\left\{\bar{\vartheta}_n^k\left[r,\left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right]+\bar{f}_n^k\left[r,\left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right]\right\}.$$

При этом краевое условие (13) запишется в виде

$$u_{\alpha,n}^k(r,0)=\tau_{0n}^k(r),\ 0\le r\le 1,$$

$$u_{\alpha,n}^k(r,1-r)=\varphi_{0n}^k(r),\ \frac{1}{2}\le r\le 1, \qquad (16)$$

$$\tau_{0n}^k(r)=r^{(m-1)/2}\bar{\tau}_{0n}^k(r),\ \varphi_{0n}^k(r)=$$

$$\varphi_{0n}^k(r)=r^{(m-1)/2}\bar{\varphi}_{0n}^k(r),\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\ldots.$$

В [4-6] показано, что задача (15), (16) имеет единственное решение.

Следовательно, сначала решив задачу (10), (13), а затем (11), (13) и т.д., найдем последовательно все $\bar{u}_n^k(r,t),\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\ldots$.

Таким образом, задача (4),(5) имеет решение вида

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}r^{(1-m)/2}u_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \qquad (17)$$

где $u_n^k(r,t)$ определяются из задачи (15),(16).

Как и в [3,6], нетрудно показать, что полученное решение вида (17) принадлежит искомому классу.

Используя результаты [4-6], можно доказать, что задача (4),(6) (т.е. задача (1),(3)) также имеет решение вида (17).

Теорема 1 при n=2 доказана.

Пусть теперь теорема 1 верна при n=к . Докажем ее при n=к+1. В этом случае задачу 1 можно разбить на две следующие задачи

Задача 4. Найти в области D_0 решение уравнения $L^k\vartheta=0$, удовлетворяющее краевым условиям

$$L^j\vartheta\big|_S=\tau_{j+1}(x),\quad L^j\vartheta\big|_{S_1}=\varphi_{j+1}(x),\quad j=\overline{0,k-1},$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}L^j\vartheta\big|_S=\nu_{j+1}(x),\quad L^j\vartheta\big|_{S_1}=\varphi_{j+1}(x),\quad j=\overline{0,k-1}.$$

Задача 5. Найти в области D_0 решение уравнения (4), удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_S=\tau_0(x),\quad u\big|_{S_1}=\varphi_0(x),$$

или

$$u_t\big|_S=\nu_0(x),\quad u\big|_{S_1}=\varphi_0(x).$$

По предположению, при n=к задача 4 имеет единственное решение $\vartheta(r,\theta,t)$, которое можно представить в виде (7).

Далее, как показано ранее, задача 5 однозначно разрешима, при этом $\vartheta(r,\theta,t)$ определяется из (7).

Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. М.:Изд-во АН СССР, 1959.162с.

2. *Protter M.H.* New voundary problems for the wave equation and equations of mixed type //J.Rational Mech. and Analysis.1954.v.3,№ 4.p.435-446

3. *Алдашев С.А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений.Алматы: Ғылым, 1994. 170с.

4. *Нуржанов Ш.Т.* Задачи Дарбу–Проттера для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений. Дис…канд.физ.-мат.наук. Алматы, 2000.67с.

5. *Алдашев С.А.* Критерий существования собственных функций спектральный задачи Дарбу-Проттера для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 2005.т.41, №6,с.795-801

6. *Алдашев С.А.* Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения. Орал,ЗКАТУ им. Жангир хана, 2007. 139с.

Резюме

Мақалада азғындалған көп өлшемді жұп дәрежелі гиперболалық теңдеулерге Дарбу есебінің шешімінің бар және жалғыздығы дәлелденген.

Summary

The correcthess of Darboux tasf for degerate multidimensional hyperbolik equations of the even order was proved in the work.

Актюбинский государственный педагогический институт г.Актюбинск

Поступила 05.05.2008

Қазақстан Республикасы
Білім және ғылым Министрлігі
Орталық ғылыми
кітапхана