УДК 517.958:536.71

А. Ш. АКЫШ

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ МОДЕЛИ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

Институт математики МОН РК КН, г. Алматы

Исследована задача Коши для четырех скоростных моделях нелинейного уравнения Больцмана, в классе гладких положительных и периодических функций. Дано обоснование метода расщепления для этой модели. Найдены априорные оценки для асимптотического поведения решения. В итоге доказана классическая разрешимость на всем промежутке ввремени $t \in (0,\infty)$.

Введение. С семидесятого года прошлого столетия интенсивно изучается теория систем дифференциальных уравнений называемых дискретными моделями нелинейного уравнения Больцмана. Среди них широко распространенными являются дискретные модели Бродуэлла. Современное состояние теории этих моделей и библиография содержатся в работах [1-3]. В [4] построены априорные оценки в пространстве L_p для решений шести скоростной модели Бродуэлла методом расщепления.

Здесь изучается четырехскоростная модель [1] также с помощью метода расщепления в классе гладких положительных и периодических функций. На каждом дробном шаге определяются точные решения расщепленной системы уравнений и исследуются их экстремальные свойства в классе гладких функций. С помощью этих свойств получены априорные оценки для асимптотического поведения решения при $t \to \infty$.

Постановка задачи. Задача Коши для системы четырех нелинейных уравнений относительно вектора функции $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ запишется в области $Q = (0,\infty) \times G$ в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_{2k-1}}{\partial t} + c\dfrac{\partial f_{2k-1}}{\partial x_k} = \sigma \displaystyle\sum_{m=1}^{2}\left(1 - 2\delta_k^m\right) f_{2m-1} f_{2m} \equiv F(\mathbf{f}), \\ \dfrac{\partial f_{2k}}{\partial t} - c\dfrac{\partial f_{2k}}{\partial x_k} = F(\mathbf{f}), \qquad k = 1,2, \end{cases} \tag{1}$$

с начальными и периодическими граничными условиями

$$f_k(0,\mathbf{x}) = \Phi_k(\mathbf{x}), \tag{2a}$$

$$f_k\big|_{\Gamma_{0x_\alpha}} = f_k\big|_{\Gamma_{1x_\alpha}}, \; k = \overline{1,4;} \;\; \alpha = \overline{1,2}, \tag{2b}$$

где $G \equiv [0,1]^2$ – единичный квадрат, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in G$, $\Gamma_{\rho x_\alpha}$ – грань квадрата G, перпендикулярная к оси x_α, проходящая через $x_\alpha = \rho$, ρ принимает значение либо 0 либо 1; $t \in (0,\infty)$; $0 < c, \sigma - const;$ δ_k^m – символ Кронекера.

Следуя [1], отметим, что рассматриваемая модель с начально-граничными условиями (2) обладает основными содержательными свойствами нелинейного уравнения Больцмана, такими как законы сохранения массы, импульса и Н – теорема.

Пусть $C(G)$ – пространство равномерно непрерывных на множестве G функций $U(\mathbf{x})$ с нормой $\|U(\mathbf{x})\| = \sup\limits_{\mathbf{x}\in G}|U(\mathbf{x})|$.

Определение. *Будем говорить, что вектор функция* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *в точке* $\xi(\mathbf{x}^0)$ *области* G *имеет локальный экстремум, если каждая компонента вектора функции* $f_k(\mathbf{x})$, $k=\overline{1,4}$ *в этой же точке* ξ *достигает локального экстремума (либо локального максимума, либо локального минимума).*

Начальные функции $\{\Phi_k,\ k=\overline{1,4}\}$ являются такими, что

i) $\Phi_k(\mathbf{x})>0 \wedge \Phi_k(\mathbf{x})\in C^2(G),\ \ k=\overline{1,4}.$

ii) функции Φ_k являются периодическими функциями по $\mathbf{x}$, т.е. удовлетворяют граничному условию (2b).

iii) вектор функция $\mathbf{\Phi}$ в некоторой точке $\xi(\mathbf{x}^0)$ множества G имеет локальный экстремум.

Множество некоторой вектор функции $\mathbf{f}=(f_1,f_2,f_3,f_4)$, обладающим свойствами **i)–iii)** начальной функции $\mathbf{\Phi}$, обозначим через $\mathbf{I}$.

Лемма 1*. Пусть билинейная форма* $F(\mathbf{f})\in C^2(G)$ *в некоторой точке* $\xi(\mathbf{x}^0)$ *области* G *достигает своего экстремума, тогда точка* ξ *является стационарной точкой вектора функции* $\mathbf{f}$*, т.е.*

$$\nabla f_k(\xi)=0,\quad k=\overline{1,4} \quad (6)$$

и вектор функция $\mathbf{f}$ *в точке* ξ *достигает локального экстремума.*

Доказательство. По условию леммы для билинейной формы $F(\mathbf{f})$ в точке $\xi(\mathbf{x}^0)$ области G выполняется необходимое условие локального экстремума $dF(\mathbf{f})|_\xi=0$, т.е. первый дифференциал функции F в точке $\xi(\mathbf{x}^0)$ равен нулю

$$dF|_\xi=\sum_{k=1}^{4}U_k df_k\Big|_\xi=0, \quad (7)$$

где

$$U_k=\frac{\partial F}{\partial f_k};\ \ df_k=\sum_{m=1}^{2}\frac{\partial f_k}{\partial x_m}dx_m\ ;\ k=\overline{1,4}.$$

Равенство в правой части (7) перепишем, используя скалярное произведение двух векторов $\mathbf{U}$ и $\mathbf{df}$

$$(\mathbf{U},\mathbf{df})=|\mathbf{U}(\xi)|\,|\mathbf{df}(\xi)|\cos\gamma=0, \quad (8)$$

где

$$\mathbf{U}=(-f_2,-f_1,f_4,f_3),$$

$$\mathbf{df}=\left(\sum_{m=1}^{2}\frac{\partial f_1}{\partial x_m}dx_m,\ \ \sum_{m=1}^{2}\frac{\partial f_2}{\partial x_m}dx_m,\ \ \sum_{m=1}^{2}\frac{\partial f_3}{\partial x_m}dx_m,\ \ \sum_{m=1}^{2}\frac{\partial f_4}{\partial x_m}dx_m\right),$$

γ – угол между векторами $\mathbf{U}$ и $\mathbf{df}$. Так как эти вектора не являются перпендикулярными, то $\cos\gamma\neq 0$. Кроме того, по условию леммы билинейная форма $F(\mathbf{f})$ в точке ξ достигает экстремума, тем самым $|\mathbf{U}(\xi)|\neq 0$. В итоге (8) имеет место тогда, когда $|\mathbf{df}(\xi)|=0$.

Откуда

$$\sum_{m=1}^{2}\frac{\partial f_k}{\partial x_m}(\xi)dx_m=0,\ k=\overline{1,4}.$$

Отсюда, с учетом произвольности дифференциалов независимых переменных $dx_m, m=1,2$, получим (6). Лемма 1 доказана.

Следствие 1. *Билинейная форма* $F(\mathbf{f}) \in C(G)$ *достигает локального экстремума в некоторой точке* $\xi(\mathbf{x}^0)$ *области G, тогда и только тогда, когда вектор функция* **f** *в точке* ξ *имеет локальный экстремум.*

Доказательство проводится, исходя из достаточного условия локального экстремума формы $F(\mathbf{f}^{n+1})$ в точке ξ относительно главных миноров симметрической матрицы, соответствующей второму дифференциалу билинейной формы $d^2F(\mathbf{f}^{n+1}(\xi))$, как в работе [5].

Метод расщепления. Для решения задачи (1), (2) используем метод расщепления. На промежутке $t \in (0, \infty)$ введем сетку

$$\omega^\tau = \{t_n = n\tau,\ n = 0,1,2,...;\ \ \tau > 0\}.$$

Пусть известное векторное приближение $\mathbf{f}^n \in \mathbf{I}$. В момент $n\tau$, функции $\{f_k^{n+1/2}\}$ $\{f_k^{n+1}\}$ $k = 1,\ldots,4$ определяются из решений следующих подсистем

$$\begin{cases} \dfrac{f_{2k-1}^{n+1/2} - f_{2k-1}^{n}}{\tau} = \sigma \displaystyle\sum_{m=1}^{2} \left(1 - 2\delta_k^m\right) f_{2m\text{-}1}^{n+1/2} f_{2m}^{n+1/2} \equiv F\left(\mathbf{f}^{n+1/2}\right), \\ \dfrac{f_{2k}^{n+1/2} - f_{2k}^{n}}{\tau} = F\left(\mathbf{f}^{n+1/2}\right), \qquad k = 1,\ 2; \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \dfrac{f_{2k-1}^{n+1} - f_{2k-1}^{n+1/2}}{\tau} + c\dfrac{\partial f_{2k\text{-}1}^{n+1}}{\partial x_k} = 0, \\ \dfrac{f_{2k}^{n+1} - f_{2k}^{n+1/2}}{\tau} - c\dfrac{\partial f_{2k}^{n+1}}{\partial x_k} = 0, \qquad k = 1,2 \end{cases} \tag{10}$$

с начальными и периодическими граничными условиями (2).

Легко убедиться, что на решениях из пространства $\mathbf{C}^2$ системы (9), (10) аппроксимируют на целом шаге по времени с первым порядком аппроксимации по τ следующую разностно-дифференциальную систему соответствующей (1)

$$\begin{cases} \dfrac{f_{2k-1}^{n+1} - f_{2k-1}^{n}}{\tau} + \dfrac{\partial f_{2k\text{-}1}^{n+1}}{\partial x_k} = \sigma \displaystyle\sum_{m=1}^{2} \left(1 - 2\delta_k^m\right) f_{2m\text{-}1}^{n} f_{2m}^{n}, \\ \dfrac{f_{2k}^{n+1} - f_{2k}^{n}}{\tau} + \dfrac{\partial f_{2k}^{n+1}}{\partial x_k} = F\left(\mathbf{f}^{n}\right), \qquad k = 1,2. \end{cases}$$

Лемма 2. *Если* $\mathbf{f}^n \in \mathbf{I}$, *то* $\mathbf{f}^{n+1/2} \in \mathbf{I}$.

Доказательство. Из системы (9), суммируя уравнения по $k = 1,...,4$, находим аналог закона сохранения массы на дробном шаге $n + 1/2$:

$$S^{n+1/2}(\mathbf{x}) \equiv \sum_{k=1}^{4} f_k^{n+1/2}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{4} f_k^{n}(\mathbf{x}) \equiv S^{n}(\mathbf{x}) \tag{11a}$$

или

$$\left\| \sum_{k=1}^{4} f_k^{n+1/2} \right\|_{C(G)} = \left\| \sum_{k=1}^{4} f_k^{n} \right\|_{C(G)}. \tag{11b}$$

И, используя (11a), снова из системы (9), находим формулы связи билинейной формы $F(\mathbf{f})$ на шагах $(n + 1/2)$ и n сетки ω^τ:

$$F\left(\mathbf{f}^{n+1/2}(\mathbf{x})\right)=\frac{F\left(\mathbf{f}^{n}(\mathbf{x})\right)}{1+\tau\sigma S^{n}(\mathbf{x})}. \tag{12}$$

Тогда решения системы (9) с помощью (12) записываются в явном виде:

$$f_1^{n+1/2}=\frac{f_1^n+\tau\sigma\left(f_1^n+f_3^n\right)\left(f_1^n+f_4^n\right)}{1+\tau\sigma S^n};\qquad f_2^{n+1/2}=\frac{f_2^n+\tau\sigma\left(f_2^n+f_3^n\right)\left(f_2^n+f_4^n\right)}{1+\tau\sigma S^n}; \tag{13a}$$

$$f_3^{n+1/2}=\frac{f_3^n+\tau\sigma\left(f_3^n+f_1^n\right)\left(f_3^n+f_2^n\right)}{1+\tau\sigma S^n};\qquad f_4^{n+1/2}=\frac{f_4^n+\tau\sigma\left(f_4^n+f_1^n\right)\left(f_4^n+f_2^n\right)}{1+\tau\sigma S^n}. \tag{13b}$$

Отсюда нетрудно проверить справедливость свойств ***i)***, ***ii)***, ***iii)*** функции $f_k^{n+1/2}$. Причем стационарная точка экстремума вектор функции $\mathbf{f}^n$ совпадает со стационарной точкой $\mathbf{f}^{n+1/2}$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Решения системы (10)* $\mathbf{f}^{n+1}\in\mathbf{I}$.

Доказательство. Система (10) с граничными условиями (2b) имеет единственное решение, которое задается явными формулами

$$f_{2k-1}^{n+1}(x_k)=\beta\alpha(x_k,0)\int_0^1\exp\left[-a(1-s_k)\right]f_{2k-1}^{n+1/2}(s_k)\,ds_k+\int_0^{x_k}\alpha(x_k,s_k)f_{2k-1}^{n+1/2}(s_k)\,ds_k,\quad k=1,2; \tag{14a}$$

$$f_{2k}^{n+1}(x_k)=\beta\alpha(1,x_k)\int_0^1\exp\left[-as_k\right]f_{2k}^{n+1/2}(s_k)\,ds_k+\int_0^{x_k}\alpha(x_k,s_k)f_{2k}^{n+1/2}(s_k)\,ds_k,\quad k=1,2, \tag{14b}$$

где

$$a=(\tau c)^{-1},\ \alpha(y,z)=a\exp[-a(y-z)],\ \beta=\left[1-\exp(-a)\right]^{-1}.$$

Из формул (14) следует, что $f_k^{n+1}>0,\ k=\overline{1,4}$, так как a, β – положительные постоянные и α, $f_k^{n+1/2}$ положительные функции. Произведем проверку периодичности функции f_k^{n+1} по $\mathbf{x}$, когда функции $f_k^{n+1/2}$ являются периодическими по $\mathbf{x}$.

Для этого, чтобы упростить запись, будем пользоваться некоторыми обозначениями

$$f_{2k}^{n+1}=y,\ f_{2k}^{n+1/2}=z,\ x_k=x,\ s_k=s.$$

Тогда, например, (14b) запишется

$$y(x)=\beta\alpha(1,x)\int_0^1\exp[-as]z(s)ds+\int_x^1\alpha(x,s)z(s)ds.$$

Подставляя соответствующие значения α предыдущему уравнению и заменяя x на $x+1$, запишем

$$y(x+1)=a\beta\exp(ax)\int_0^1\exp[-as]z(s)ds+a\exp(a)\int_{x+1}^1 z(s)\exp(-a(s-x))ds.$$

Рассмотрим интеграл

$$I=\int_{x+1}^1 z(s)\exp(-a(s-x))ds.$$

Отсюда произведем замену переменной $s=t+1$ и имеем цепь

$$I=\int_x^0 z(t+1)\exp\left(-a(t+1-x)\right)dt=-\exp(-a)\int_0^x z(s)\exp\left(-a(s-x)\right)ds.$$

Тогда

$$y(x+1)=a(\beta-1)\exp(ax)\int_0^1 z(s)\exp(-as)ds+a\int_x^1 z(s)\exp(-a(s-x))ds=y(x),$$

так как $\beta-1=\exp(-a)\beta$, тем самым доказано свойство ***ii)***.

Рассмотрим билинейную форму $F(\mathbf{f})$ на $(n+1)$-ем слое сетки ω^τ. Стационарная точка ζ локального экстремума формы $F\left(\mathbf{f}^{n+1}\right)$ определяется из равенства $dF\left(\mathbf{f}^{n+1}\right)=0$, что равносильно $\nabla f_k^{n+1}(\zeta)$, $k=\overline{1,4}$ (по лемме 1). По следствию 1 вектор функция $\mathbf{f}^{n+1}$ также в точке ζ достигает экстремума, т.е. имеет место свойство ***iii)***. Причем из системы (10) в точке экстремума билинейной формы $F\left(\mathbf{f}^{n+1}\right)$ получим соотношение

$$\mathbf{f}^{n+1}(\zeta)=\mathbf{f}^{n+1/2}(\zeta), \tag{15}$$

Откуда следует, что

$$F\left(\mathbf{f}^{n+1}(\zeta)\right)=F\left(\mathbf{f}^{n+1/2}(\zeta)\right). \tag{16}$$

Из (15) и (16) на основании второй теоремы Вейерштрасса соответственно имеем

$$\left\|\mathbf{f}^{n+1}\right\|_{C(G)}\le\left\|\mathbf{f}^{n+1/2}\right\|_{C(G)}\qquad \left\|F\left(\mathbf{f}^{n+1}\right)\right\|_{C(G)}\le\left\|F\left(\mathbf{f}^{n+1/2}\right)\right\|_{C(G)}. \tag{17}$$

Кроме того, закон сохранения массы (11) в точке ζ экстремума билинейной формы $F\left(\mathbf{f}^{n+1}\right)$ или вектор функции $\mathbf{f}^{n+1}$, благодаря (15), запишется в виде

$$\sum_{k=1}^4 f_k^{n+1}(\zeta)=\sum_{k=1}^4 f_k^{n+1/2}(\zeta)=\sum_{k=1}^4 f_k^{n}(\zeta). \tag{18}$$

Соотношение (18), суммируя по n, найдем

$$\sum_{k=1}^4 f_k^{n+1}(\zeta)=\sum_{k=1}^4 f_k^{n+1/2}(\zeta)=\sum_{k=1}^4 \Phi_k(\zeta).$$

Отсюда с учетом (11b) имеем

$$\left\|\sum_{k=1}^4 f_k^{n+1}\right\|\le\sum_{k=1}^4\|\Phi_k\|,\qquad \inf_G\sum_{k=1}^4 f_k^{n+1}(\zeta)\ge\sum_{k=1}^4\inf_G\Phi_k=\gamma. \tag{19}$$

Тогда из формулы (12) с учетом (17) и (19) получаем цепочку

$$\left\|F\left(\mathbf{f}^{n+1}\right)\right\|_{C(G)}\le\left\|\frac{F\left(\mathbf{f}^{n}\right)}{1+\tau\sigma\sum_{k=1}^4\Phi_k}\right\|_{C(G)}\le\frac{\left\|F\left(\mathbf{f}^{n}\right)\right\|_{C(G)}}{1+\tau\sigma\sum_{k=1}^4\inf_{\mathbf{x}\in G}\Phi_k}=\frac{\left\|F\left(\mathbf{f}^{n}\right)\right\|_{C(G)}}{1+\tau\sigma\gamma}.$$

Откуда, суммируя по n, находим ключевую оценку для асимптотического поведения билинейной формы на всем промежутке времени t в следующем виде:

$$\left\|F(\mathbf{f}^{n+1})\right\|_{C(G)}\le\exp\left(-\sigma\gamma t_{n+1}\right)\left\|F\left(\mathbf{\Phi}\right)\right\|_{C(G)},\qquad \forall t_{n+1}\in(0,\infty). \tag{20}$$

Из первой оценки (17) получим

$$\left\|f_k^{n+1}\right\|_{C(G)}\le\left\|f_k^{n+1/2}\right\|_{C(G)}. \tag{21}$$

Далее, производя аналогичную оценку, решение k-го уравнения системы (9) с учетом (12), (20) и (21), получим

$$\left\|f_k^{n+1}\right\|_{C(G)}\le\|\Phi_k\|_{C(G)}+\sigma t_{n+1}\exp(-\sigma\gamma t_{n+1})\|F(\Phi)\|_{C(G)}, \tag{22}$$

$$k=\overline{1,4};\quad \forall t_{n+1}\in(0,\infty).$$

Теорема. *Если начальная вектор функция* $\mathbf{\Phi} \in \mathbf{I}$, *то существует единственное решение* $\mathbf{f}^{n+1} \in \mathbf{I}$ *схемы метода расщепления (9)-(10) на всем промежутке времени* $(0, \infty)$, *удовлетворяющее оценке (22)*

Автор выражает благодарность академику АН РК Блиеву Н. К. за поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1 Sultangazin U.M. Discrete Nonlinear Models of the Boltzmann Equation. – Moscow: Nauka, 1987. – 191 p.

2 Platkowski T., Illner R. Discrete velocity models of the Boltzmann equation: A survey on the mathematical aspects of the theory SIAM Rev. – 1988. – V. 30, N 2. – P. 213-255.

3 Studies in Statistical Mechanics // No equilibrium phenomena// The Boltzmann equation // E. W. Montroll and J. L. Lebowitz General Editors, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1983. – 269 p.

4 Akishev A.Sh. A Global Existence and Uniqueness Theorem for the Three-Dimensional Broadwell Model // Computational Mathematics and Mathematics Physics. – 1997. – Vol. 37, N 3. – P. 359-369.

5 Akysh A.Sh. New the properties of Navier-Stokes equations // Vestn. KarSU. – 2010. – № 4(60). – C. 16-24.

Ә. Ш. Ақыш

БОЛЬЦМАН ТЕҢДЕУІНІҢ БІР МОДЕЛІНІҢ ШЕШІЛЕТІНДІГІ ЖӨНІНДЕ

Жұмыста оң жатық және периодты функциялар класында бейсызықты Больцман теңдеуі үшін төрт жылдамдықтағы Бродуэлл моделіне қойылған Коши есебі зерттелген. Бұл модельге ыдырату әдісі негізделген, яғни оның сызба шешімінің априорлық бағалары табылып, асимптотикалық тәртібі анықталған. Сөйтіп қойылған есептің барлық уақыт аралығында $t \in (0, \infty)$ бір мәнді классикалық шешілетіндігі дәлелденген.

A. Sh. Akysh

ON THE SOLVABILITY OF THE BOLTZMANN EQUATION MODELS

We study the Cauchy problem for a four-speed model of the nonlinear Boltzmann equation in the class of smooth periodic functions and positive. We justify the splitting method for this model. Found a priori estimates for the asymptotic behavior of solutions. In the end, proved classical solvability for the whole on time $t \in (0, \infty)$.