УДК 532.5: 517.994

А. Ш. АКЫШ

О РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

(2-часть)

В первой части данной работы [1] из начально-краевой задачи для нелинейных нестационарных уравнений Навье-Стокса (УНС) выведена задача Неймана для уравнения Пуассона относительно давления P с однородным граничным условием и в итоге получена полная постановка начально-краевой задачи для уравнений Навье-Стокса. Здесь выявлено важное свойство УНС – принцип максимума, которой позволяет доказать однозначную разрешимость задачи для УНС в целом по времени $t \in [0,T], \forall T < \infty$.

Постановка задачи. Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнений Навье-Стокса в полной постановке [1][1] относительно вектора скорости $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)$ и давления P в области $Q = (0,T] \times \Omega$:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \mu \Delta \mathbf{U} + (\mathbf{U}, \nabla)\mathbf{U} + \nabla P = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \tag{1a}$$

$$\mathbf{U}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}), \ \ \mathbf{U}(t, \mathbf{x})\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1b}$$

$$-\Delta P = \operatorname{div}\{(\mathbf{U}, \nabla)\mathbf{U}\},$$

$$\left.\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{2}$$

где $\mathbf{x} \in \Omega \subset R_3$; Ω – выпуклая область, а $\partial\Omega$ – граница её, $t \in [0,T]$, $T < \infty$; $\mathbf{f}$ и $\mathbf{\Phi}$ – вектор-функции соответственно внешних сил и начальных данных; $\overset{0}{\mathbf{J}}(\Omega)$ – пространство соленоидальных векторов, а $\mathbf{G}(\Omega)$ состоит из $\nabla\eta$. Известно [2] ортогональное разложение $\mathbf{L}_2(Q) = \mathbf{G}(Q) \oplus \overset{0}{\mathbf{J}}(Q)$, причем элементы $\overset{0}{\mathbf{J}}(Q)$ при $\forall t$ принадлежат $\overset{0}{\mathbf{J}}(\Omega)$; $\overset{0}{\mathbf{J}}_p(\Omega)$ – пространство соленоидальных векторов из $\mathbf{L}_p(\Omega)$; $W^k_{p,0}(\Omega)$ – соболевское пространство функций равных нулю на $\partial\Omega$;

a) вектор-функция $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \in \mathbf{C}(\overline{Q}) \cap \overset{0}{\mathbf{J}}(Q)$;

b) начальная вектор-функция $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \in \mathbf{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathbf{W}^1_{2,0}(\Omega) \cap \overset{0}{\mathbf{J}}(\Omega)$.

Принцип максимума. Из уравнений (1a) при $\mathbf{f} = 0$, получаем нелинейное уравнение параболического типа для кинетической энергии $E = \frac{\vartheta^2}{2}$:

$$\equiv \frac{\partial E}{\partial t} - \mu \Delta E + (\nabla E, \mathbf{U}) +$$

$$LE + \mu \sum_{\alpha=1}^{3} |\nabla U_\alpha|^2 + (\nabla P, \mathbf{U}) = 0. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть Ω – замкнутая ограниченная область в R_3 с границей $\partial\Omega$, и $\overline{Q} = [0,T] \times \overline{\Omega}$ – цилиндрическая область в пространстве переменных $t, \mathbf{x}$. Предположим, что функции $(P, E) \in C(\overline{Q}) \cap C^2(Q)$ и удовлетворяют соответственно уравнениям (2), (3). Тогда функция $E(t, \mathbf{x})$ принимает свой наибольший максимум в цилиндре $\overline{Q}$ на нижнем основании $\{0\} \times \overline{\Omega}$ или на его боковой поверхности $[0,T] \times \partial\Omega$, т. е.*

$$E(t, \mathbf{x}) \le \max\{ \sup_{t=0 \wedge \mathbf{x} \in \overline{\Omega}} E(t, \mathbf{x}),$$

$$\sup_{t \in [0,T] \wedge \mathbf{x} \in \partial\Omega} E(t, \mathbf{x}) \} = M - \text{const}. \tag{4}$$

[1]В [1] имеются описки. В формуле (1a) 2-й и 3-й символы “ Δ ” следует заменить на “ ∇ ”; стр.31 в 3-й строке 1-й колонки поменять местами “ Δ ” и “ ∇ ” и в 7-й строке заменить “ Δ ” на “ ∇ ”.

И имеет место

Лемма 1. *Если кинетическая энергия* $E(t,\mathbf{x})$ *достигает своего наибольшего максимума в точке* $(t',\mathbf{x}')$ *области* $Q=(0,T]\times\Omega$, *то точка* $(t',\mathbf{x}')$ *является стационарной точкой для функции давления* P, т. е. справедливо равенство $\nabla P(t',\mathbf{x}')=0$.

Теперь для доказательства теоремы 1 воспользуемся известным приемом [3]. Предположим от противного, т. е. функция $E(t,\mathbf{x})$ достигает своего наибольшего максимального значения в некоторой точке $(t^0,\mathbf{x}^0)$ внутри области $Q=(0,T]\times\Omega$

$$E(t^0,\mathbf{x}^0)>\max\{\sup_{t=0\wedge x\in\overline{\Omega}}E(t,\mathbf{x}),$$

$$\sup_{t\in[0,T]\wedge x\in\partial\Omega}E(t,\mathbf{x})\}=M\geq 0. \qquad (5)$$

Обозначим $m=E(t^0,\mathbf{x}^0)-M>0$ и введем функцию $H(t,\mathbf{x})=E(t,\mathbf{x})+\frac{m}{2}\left(1-\frac{t}{T}\right)$.

Функция $H(t,\mathbf{x})$ также принимает свое наибольшее максимальное значение в некоторой точке $(t',\mathbf{x}')\in Q$, причем $H(t',\mathbf{x}')\geq H(t^0,\mathbf{x}^0)\geq m$.

Выпишем все необходимые условия наибольшего максимума функции H в точке $(t',\mathbf{x}')$

$$\{\nabla U_\alpha=0,\ \alpha=\overline{1,3};\}\Rightarrow\nabla H=0;$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}\geq 0;\ \Delta H(t',\mathbf{x}')\leq 0;\ \nabla P(t',\mathbf{x}')=0. \qquad (6)$$

Из уравнения (3) с учетом условий (6) найдем для точки $(t',\mathbf{x}')$ цепь неравенств

$$\equiv\frac{\partial H}{\partial t}-\mu\Delta H+(\nabla H,\mathbf{U})+\mu\sum_{\alpha=1}^{3}|\nabla U_\alpha|^2+$$

$$LE+(\nabla P,\mathbf{U})+\frac{m}{2T}\geq\frac{m}{2T}>0.$$

Это означает, что неравенство (5) неверно. Следовательно, справедливо (4). Теорема 1 доказана.

Теорема 1 и Лемма 1 позволяют сформулировать следующий принцип максимума для уравнений (1a):

Следствие 1. *Пусть* $\overline{\Omega}$ – *замкнутая ограниченная область в* R_3 *с границей* $\partial\Omega$ *и* $\overline{Q}=[0,T]\times\overline{\Omega}$ – *цилиндрическая область в пространстве переменных* $t,\mathbf{x}$. *Предположим, что функции* $(U_\alpha,\alpha=\overline{1,3};\ P)\in C(\overline{Q})\cap C^2(Q)$ *и удовлетворяют, соответственно, уравнениям (1a), (2). Тогда, если* $f_\alpha\leq 0$ $(f_\alpha\geq 0)$, $\alpha=\overline{1,3}$, *то каждая функция* U_α *принимает свой максимум (минимум) в цилиндре* $\overline{Q}$ *на нижнем основании* $\{0\}\times\overline{\Omega}$ *или на его боковой поверхности* $[0,T]\times\partial\Omega$, *т. е.*

$$U_\alpha(t,\mathbf{x})\leq\max\{\sup_{t=0\wedge x\in\overline{\Omega}}U_\alpha(t,\mathbf{x}),$$

$$\sup_{t\in[0,T]\wedge x\in\partial\Omega}U_\alpha(t,\mathbf{x})\},(t,\mathbf{x})\in\overline{Q}, \qquad (7a)$$

$$(U_\alpha(t,\mathbf{x})\geq\min\{\inf_{t=0\wedge x\in\overline{\Omega}}U_\alpha(t,\mathbf{x}),$$

$$\inf_{t\in[0,T]\wedge x\in\partial\Omega}U_\alpha(t,\mathbf{x})\},(t,\mathbf{x})\in\overline{Q}), \qquad (7b)$$

где $\alpha=\overline{1,3}$.

Отсюда, следуя [3], можно получить доказательство следующего утверждения:

Следствие 2. *Если вектор-функция* $\mathbf{U}(t,\mathbf{x})$ – *классическое решение начально-краевой задачи уравнений Навье-Стокса (1) и вектор-функций* $\mathbf{f},\mathbf{\Phi}$ *удовлетворяют условиям a) и b), то справедлива оценка*

$$\|\mathbf{U}\|_{C(\overline{Q})}\leq\|\mathbf{\Phi}\|_{C(\overline{\Omega})}+T\|\mathbf{f}\|_{C(\overline{Q})}\equiv A_1,\forall T<\infty, \qquad (8)$$

где $\|\mathbf{U}\|_{C(\overline{Q})}=\max_{1\leq\alpha\leq 3}\sup_{\overline{Q}}|U_\alpha(t,\mathbf{x})|$.

Определение[2] **1.** *Назовем слабым обобщенным решением полной начально-краевой задачи Навье-Стокса (1) и (2) вектор-функцию* $\mathbf{U}$ *и функцию P соответственно из пространств*

$$\mathbf{L}_\infty\left((0,T];\mathbf{W}^1_{2,0}(\Omega)\cap\overset{0}{\mathbf{J}}_\infty(\Omega)\right);$$

$$L_\infty\left([0,T];W^1_2(\Omega)\right)\wedge\left(\int_\Omega P(t,\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=0,t\in[0,T]\right)$$

и удовлетворяющие тождествам

$$\int_Q\Big(-\mathbf{U}\mathbf{V}_t+\mu\sum_{k=1}^{3}\nabla U_k\nabla V_k+$$

[2]Данное определение отличается от приведенного в [2].

$$+((\mathbf{U},\nabla)\mathbf{U}+\nabla P)\mathbf{V}\big)\mathbf{dx}dt=$$

$$=\int_{\Omega}\mathbf{\Phi V}(0,\mathbf{x})\mathbf{dx}+\int_{Q}\mathbf{fV}\mathbf{dx}dt;$$

$$\int_{Q}\nabla P\nabla\eta\,\mathbf{dx}dt=-\int_{Q}(\mathbf{U},\nabla)\mathbf{U}\nabla\eta\,\mathbf{dx}dt, \qquad (9)$$

при любых

$$\mathbf{V}(t,\mathbf{x})\in \mathbf{W}_2^1(Q)\wedge\left(\mathbf{V}\big|_{(t=T)\wedge(\mathbf{x}\in\partial\Omega)}=0\right);$$

$$\eta(t,\mathbf{x})\in L_\infty\left([0,T];W_2^1(\Omega)\right).$$

Для справедливости этого определения все интегралы, входящие в (9), должны быть конечны для любых $\mathbf{V},\eta$ из указанных классов.

Лемма[3] **2.** *Если входные данные задачи (1) удовлетворяют требованиям a), b), то для слабых обобщенных решений задач (1) и (2) справедливы оценки:*

$$\|\mathbf{U}\|^2_{L_\infty((0,T];L_2(\Omega))}\le 2\|\mathbf{\Phi}\|^2_{L_2(\Omega)}+$$

$$+4T^2\|\mathbf{f}\|^2_{L_\infty((0,T];\,L_2(\Omega))}\equiv A, \qquad (10)$$

$$\sum_{k=1}^{3}\int_0^t\|\nabla U_k(\tau)\|^2_{L_2(\Omega)}\,d\tau\le\frac{1}{\mu}\|\mathbf{\Phi}\|^2_{L_2(\Omega)}+$$

$$+\frac{2T^2}{\mu}\|\mathbf{f}\|^2_{L_\infty((0,T];L_2(\Omega))}\equiv A_2, \qquad (11)$$

$$\|\nabla P\|^2_{L_2(Q)}\le\|(\mathbf{U},\nabla)\mathbf{U}\|^2_{L_2(Q)}\le 9A_1^2A_2\equiv A_3. \qquad (12)$$

Неравенства (10), (11) известны из [2], а доказательство (12) дано в [1].

Из принципа максимума и полученных априорных оценок следует разрешимость задач (1), (2):

Теорема 2. *Если входные данные* $\mathbf{f}$ *и* $\mathbf{\Phi}$ *удовлетворяют соответственно требованиям a), b), тогда у каждой задачи (1) и (2) существует единственное слабое обобщенное решение* $\mathbf{U}$ *и* P *удовлетворяющие тождествам (9), при любых* $\mathbf{V}$ *и* η *из определения 1.*

Подробное доказательство теоремы единственности слабого обобщенного решения приведено в [1] на страницах 34-35, однако оценку (12) в [1] следует заменить на оценку (8) в данной работе.

Определение 2. *Если в области* Q *слабое обобщенное решение полной начально-краевой задачи Навье-Стокса имеет всевозможные обобщенные производные того же порядка, что и сами уравнения, то это решение называется сильным.*

Теорема 3. *Если входные данные задачи (1) удовлетворяют требованиям a), b) и граница области* $\partial\Omega\in C^2$*, тогда у каждой задачи (1) и (2) существует единственное сильное решение и для них имеют место оценки*

$$\|\mathbf{U}_t\|^2_{L_2(Q)}\le\mu\sum_{k=1}^{3}\|\nabla\Phi_k\|^2_{L_2(\Omega)}+5A_3+$$

$$+2T\|\mathbf{f}\|^2_{L_\infty([0,T];L_2(\Omega))}\equiv A_5,\ \mathbf{U}_t=\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}, \qquad (13)$$

$$\|\Delta\mathbf{U}\|^2_{L_2(Q)}\le A_5/\mu^2\equiv A_6, \qquad (14)$$

$$\|\nabla U_k\|^2_{L_\infty([0,T];L_2(\Omega))}\le A_5/\mu\equiv A_7,\ k=\overline{1,3}; \qquad (15)$$

$$\|\mathbf{U}\|_{L_2([0,T];W_2^2(\Omega))}\le A_8\|\Delta\mathbf{U}\|_{L_2(Q)},\qquad A_8-\text{const}, \qquad (16)$$

$$\|P\|_{L_2([0,T];W_2^2(\Omega))}\le A_p\|\Delta P\|_{L_2(Q)}\le$$

$$\le A_c\|\mathbf{U}\|_{L_2([0,T];W_2^2(\Omega))},\ A_p,A_c-\text{const}. \qquad (17)$$

Для доказательства неравенства (13) из уравнения (1a) найдем тождество

$$\int_{Q_t}\left(\mathbf{U}_t-\mu\Delta\mathbf{U}\right)^2\mathbf{dx}d\tau=\int_{Q_t}\left(\mathbf{f}-(\mathbf{U},\nabla)\mathbf{U}-\nabla P\right)^2\mathbf{dx}\,d\tau. \qquad (18)$$

Будем возводить в квадрат подынтегральные выражения. После этого парное произведение в левой части преобразуем с помощью интегрирования по частям, а в правой части таковые усилим по неравенству Юнга, при $\varepsilon=1\wedge p=2$. Затем переходим к неравенству

$$\int_{Q_t}\mathbf{U}_t^2\,\mathbf{dx}\,d\tau+\mu^2\int_{Q_t}(\Delta\mathbf{U})^2\,\mathbf{dx}\,d\tau+\mu\sum_{k=1}^{3}\int_{\Omega}|\nabla U_k|^2\,\mathbf{dx}\le$$

$$\le\mu\sum_{k=1}^{3}\int_{\Omega}\|\nabla\Phi_k\|^2\,\mathbf{dx}+2\int_{Q_t}\mathbf{f}^2\,\mathbf{dx}d\tau+5\int_{Q_t}\left((\mathbf{U},\nabla)\mathbf{U}\right)^2\mathbf{dx}\,d\tau.$$

Из последнего неравенства с учетом (12) получаем оценки (13)-(15) для сильных обобщенных решений задачи (1). Вектор-функция, подчинённая этим оценкам, удовлетворяет

[3]Некоторые необходимые сведения: известные неравенства и теорема о разрешимости задачи Неймана приведены в [1], стр. 31-32.

уравнениям (1а) почти всюду в Q. Заметим, что оценка (15) лучше, чем (11).

Теперь покажем, что $\Delta P \in L_2(Q)$. Так как граница области $\partial\Omega \in C^2$ найдем оценку (16), используя неравенства из [2](стр.26), справедливого для любой функции $U(x) \in W_2^2(\Omega) \cap W_{2,0}^2(\Omega)$:

$$\| U \|_{W_2^2(\Omega)} \le A_8 \| \Delta U \|_{L_2(\Omega)}, \quad \forall t \in [0,T], \ A_8 - \text{const}.$$

Уравнение (2) запишем в виде

$$-\Delta P = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial U}{\partial x_k}, \nabla U_k \right).$$

Возведя обе части последнего соотношения в квадрат, проинтегрируем по области Q. Затем, произведя оценку в правой части, получаем цепочку

$$\int_Q (\Delta P)^2 \, \mathbf{dx} dt \le \int_Q \left(\sum_{k=1}^{3} \left| \frac{\partial U}{\partial x_k} \right| \left| \nabla U_k \right| \right)^2 \mathbf{dx} \, dt \le$$

$$\le 9 \sum_{k,\beta=1}^{3} \int_Q \left| \frac{\partial U_k}{\partial x_\beta} \right|^4 \mathbf{dx} \, dt, \quad \forall t \in [0,T]. \qquad (19)$$

Из теорем вложения Соболева имеем, что $W_2^2(\Omega) \subset W_{6-\varepsilon}^1(\Omega)$, $\forall \varepsilon > 0$. Отсюда, при $\varepsilon = 2$, следует неравенство

$$\| U_k \|_{W_4^1(\Omega)} \le A_9 \| U_k \|_{W_2^2(\Omega)}, \quad \forall t \in [0,T],$$

где A_9 – некоторая постоянная. На основании последнего неравенства и (14), (16) из (19) найдем оценку (17). Теорема 3 доказана.

Замечание. Для численного определения сильных решений задачи (1) можно использовать разностные схемы [4] и [5] устойчивые в пространстве ℓ_p, $2 \le p \le \infty$ и разработанные применительно к системам трехмерных уравнений Бюргерса и Навье-Стокса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Акыш А. Ш.* О решении уравнений Навье-Стокса // Известия НАН РК. Сер. физ.-мат. Алматы, 2007, № 1. С.30-35.

2. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Москва, Наука, 1970. 288 С.

3. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. Москва, Наука, 1967. 436 С.

4. *Акыш А. Ш.* Устойчивость в ℓ_p некоторых разностных схем для одной системы нелинейных параболических уравнений // Сиб. журн. вычисл. математики, Новосибирск, -2005. Т.8, №4. -С. 273-280.

5. *Акыш А. Ш.* Разностные схемы для уравнений Навье-Стокса // Материалы Международной конференции "Теория функций, алгебра и математическая логика" посвященной 90-летию академика А. Д. Тайманова, Алматы, 2007, -С. 101-103.

Резюме

Жұмыста Навье-Стокс теңдеуінің теориясындағы кейбір маңызды мәселелерге жауап алынған. Зерттеу барысында Навье-Стокс теңдеуінің басты қасиеті – максимум принципі айқындалған, соның негізінде есептің әлсіз, өлді және классикалық жалқы шешулерінің барлығын дәлелдеу мүмкіндігі көрсетілген. Үш өлшемді бейсызықты Навье-Стокс теңдеуі мен қысымды табатын Нейман есебінің бастапқы деректерінің табиғи талаптарды қанағаттандыруына байланысты түпті облыста, барлық уақыт аралығында $t \in [0,T], \forall T < \infty$ шешілетіндігі дәлелденген.

Summary

In the present work there are given answers of certain principle problems in the theory of equations of Navier-Stoks. In the research process of this problem there was detected an important property of Navier-Stokes – principle of maximum, which proves the uniqueness and existence of the weak, strong generalized and classic solutions. It proved identical solvability as a whole on time $t \in [0,T], \forall T < \infty$ at tree-dimensional problem for equations of Navier-Stokes in bounded domain and its corresponding problem of Neumann by natural requirements from input data.